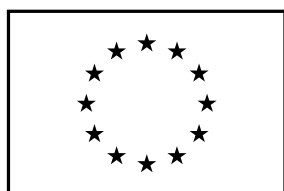


UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta



Ján KAŇUK

**PRIESTOROVÉ ANALÝZY
A MODELOVANIE**



Európska únia
Európsky sociálny fond



*Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ*

Publikácia vychádza ako výstup aktivity 1.2 Tvorba a inovácia študijných programov na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v rámci dopytovo-orientovaného projektu **Rozvoj inovatívnych foriem vzdelávania a podpora interdisciplinariny štúdií na Univerzite Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach (RIFIV)**, ITMS 26110230101.

PRIESTOROVÉ ANALÝZY A MODELOVANIE

Vysokoškolské učebné texty

Autor: © 2015

RNDr. Ján Kaňuk, PhD. - *Ústav geografie,*

Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Recenzenti:

prof. Mgr. Jaroslav Hofierka, PhD.

doc. RNDr. Dagmar Kusendová, CSc.

Jazykový korektor:

PhDr. Žofia Figeľová

© 2015 Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta

Všetky práva vyhradené. Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovat', ukladať do informačných systémov alebo inak rozširovať bez súhlasu majiteľov práv.

Za odbornú stránku publikácie zodpovedá autor.

ISBN 978-80-8152-290-1

OBSAH

Zoznam použitých skratiek	3
1 Úvod	7
2 Konceptuálna reprezentácia krajiny v GIS	9
2.1 Rastrový dátový model	11
2.2 Vektorový dátový model	12
2.3 Geografická poloha	14
2.3.1 Súradnicové systémy používané na Slovensku	20
2.3.2 Transformácie súradnicových systémov	21
3 Priestorové geodatabázy, výbery z geografických databáz	23
3.1 Typy geodatabáz	24
3.2 Základné pojmy	27
3.3 Dopytovací jazyk	28
4 Matematické základy pre priestorové analýzy a interpoláciu	31
4.1 Interpoláčny polynóm	31
4.2 Splajn	33
4.3 Metóda najmenších štvorcov	39
5 Priestorové analýzy	45
5.1 Analýza vzdialenosti	45
5.2 Mapová algebra	49
5.3 Analýza distribúcie geopriestorových dát	52
5.4 Priestorová autokorelácia	54
5.5 Jadrové analýzy hustoty	58
6 Priestorová interpolácia	67
6.1 Lineárna kombinácia	68
6.2 Thiessenove polygóny	71
6.3 Metóda najbližšieho suseda	73
6.4 Triangulácia	74
6.5 Bilineárna interpolácia	82
6.6 Metóda prirodzeného suseda	85
6.7 Metóda inverzne váženej vzdialenosti (IDW)	87
6.8 Metóda trendového povrchu	94
6.9 Metóda multivariačného modelovania pomocou splajnu	97
6.10 Kriging	104
7 Záver	109
Zoznam použitej literatúry	110

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK

.NET - (NET pochádza z network - sieť) je zastrešujúci názov pre súbor technológií v softvérových produktoch, ktoré tvoria celú platformu dostupnú nielen pre Web, Windows a Pocket PC. Common Language Infrastructure je štandardizovaná špecifikácia jadra .NET. Základným komponentom je Microsoft .NET Framework, prostredie potrebné pre beh aplikácií a ponúkajúce spúšťacie rozhranie ako aj potrebné knižnice.

ANSI – (American National Standards Institute) je americká štandardizačná nezisková organizácia sídliača vo Washingtone. Jej hlavným cieľom je tvorba priemyselných štandardov pre USA. Je členom ISO (International Organization for Standardization), teda Medzinárodnej organizácie pre normalizáciu) so sídlom v Ženeve. ANSI štandardy majú vplyv na napr. na oblasť programovania a používania štandardizovanej sady znakov ASCII, ktorá sa používa v celom svete.

API - (Application Programming Interface) je zbierka funkcií a tried (ale aj iných programov), ktoré určujú akým spôsobom sa majú funkcie knižníc volať zo zdrojového kódu programu. API funkcie sú programové celky, ktoré programátor volá namiesto vlastného naprogramovania.

ArcGIS – jeden z najrozšírenejších komerčných GIS softvérov. Je vyvíjaný spoločnosťou ESRI.

ASCII - (American Standard Code for Information Interchange) je americký štandardný kódovací systém znakov anglickej abecedy, číslíc, iných znakov a radiacích kódov.

Bpv – (baltský systém po vyrovnaní) je výškový systém používaný na Slovensku a v ďalších štátoch. Miesto s nulovou nadmorskou výškou sa nachádza v meste Kronštadt na brehu Baltského mora. Od tohto miesta sa určuje výškový systém určený pomocou normálnych (Molodenského) výšok z medzinárodného vyrovnania nivelačných sietí.

C++ - je programovací jazyk, ktorý podporuje procedurálne programovanie, dátovú abstrakciu, objektovo orientované programovanie, ale aj generické programovanie. Od 90-tych rokov 20. storočia patrí k najpopulárnejším programovacím jazykom.

CASE systémy - (Computer Aided Software Engineering) je počítačom podporované softvérové (systémové) inžinierstvo alebo vývoj softvéru s využitím počítačovej podpory. Ide o nástroje pre vývojárov IT systémov, ktoré pomáhajú znížiť dobu vývoja, zvýšiť kvalitu IT systémov a tým znížiť náklady na vývoj. Použitím CASE nástroja je možné zachytiť, analyzovať a organizovať modely IT systémov.

ČSJSN – J - (Československá jednotná nivelačná sieť - Jadran) - výškový systém, ktorý sa používal v Československu do roku 1957. Išlo o normálne ortometrické výšky určené od hladinového elipsoidu pozdĺž siločiar k určenému bodu. Referenčným bodom pre tento výškový systém bol vodočet umiestnený na Molo Sartorio v meste Terst (Taliansko) na pobreží Jadranského mora.

DATALOG - je deklaratívny logický programovací jazyk, ktorý je syntakticky zaradený do podmnožiny Prolog. Deklaratívne programovacie jazyky sú navrhnuté tak, že programátor popisuje len cieľ výpočtu, pričom presný postup, akým sa k výsledku program dostane, je ponechaný na ľubovôli systému. Prolog sa snaží o pokiaľ možno abstraktné vyjadrenie faktov a logických vzťahov medzi nimi s potlačením imperatívnej zložky.

DB2 - je relačná databáza vyvíjaná firmou IBM, ktorá je dostupná vo viacerých verziách alebo licenčných dohodách. Ide o databázu, ktorá beží na platformách viacerých operačných systémoch s pokročilými možnosťami kontroly dát, ich využívania a ochrany.

DPZ - diaľkový prieskum zeme - je to veda, resp. technológia bezkontaktného zberu informácií o zúčtových objektoch.

ETRS 89 - The European Terrestrial Reference System 1989 - je geocentrický geodetický karteziánsky súradnicový systém, v ktorom sú súradnice stabilizované na Euroázijskej geotektonickej platni, čím sa ich poloha stabilizuje. Súradnice bodov sa preto nemenia (alebo len veľmi málo) a nie

sú závislé na pohybe kontinentov, pretože body súradnicových systémov sa nachádzajú na geotektonických platniach a pohybujú sa spolu s celým kontinentom.

FAT - **File Allocation Table** - ide o tabuľku obsahujúcu informácie o obsadení disku v súborovom systéme natívne vyvinutom pre operačný systém DOS. FAT je jednoduchý súborový systém s podporou podadresárov využívajúcich adresáciu klastrov podľa definovanej kapacity. Klastry môžu byť tvorené jedným alebo viacerými sektormi.

GeoDa - je voľne dostupný softvérový balík, ktorý vykonáva analýzu priestorových dát, ich vizualizáciu, priestorovú autokoreláciu a priestorové modelovanie. GeoDA má implementované viaceré nástroje pre rôzne geoštatistické a priestorové analýzy.

geodetický systém

GNSS - Globálny družicový polohový systém (**Global Navigation Satellite System**) je služba poskytujúca pomocou družíc autonómne určovanie polohy s celosvetovým pokrytím. V roku 2015 sú plne funkčné 2 nezávislé systémy. Známejší NAVSTAR GPS je prevádzkovaný armádou USA. Od roku 2012 je však plne funkčný aj systém GLONASS prevádzkovaný Ruskom. Vo vývoji sú aj ďalšie systémy, hlavne európsky GALILEO a čínsky COMPASS.

GRASS GIS - (**Geographic Resources Analysis Support System**) je voľne šíriteľný geografický informačný systém s otvoreným kódom. Umožňuje prácu s rastrovými a vektorovými priestorovými dátami na viacerých platformách. Ovládanie softvéru je možné pomocou príkazového riadka ako aj pomocou grafického užívateľského rozhrania (GUI).

IBM - (**International Business Machines Corporation**) je svetová technologicko-obchodná spoločnosť špecializujúca sa na oblasť informačných technológií. Medzi jej hlavné činnosti patrí výroba a predaj počítačového hardvéru, softvéru a poskytovanie služieb. Spoločnosť IBM je priekopníkom v mnohých oblastiach počítačového priemyslu, od mainframe počítačov po nanotechnológie. IBM má dlhodobú tradíciu. Vznikla v roku 1888.

IDE - (**Integrated Development Environment**) je softvér uľahčujúci prácu programátorov, väčšinou zameraný na jeden konkrétny programovací jazyk. Obsahuje editor zdrojového kódu, kompilátor, prípadne interpret a väčšinou i debugger. Niektoré obsahujú systém pre rýchly vývoj aplikácií, ktorý slúži pre vizuálny návrh grafického užívateľského rozhrania.

IMS (**Information Management System**) – jeden z prvých hierarchických databázových systémov, ktorý bol vyvinutý firmou IBM pre program Apollo (vesmírny program letu na mesiac).

Informix – objektovo-relačný databázový systém vyvinutý spoločnosťou IBM

ITRS (**International Terrestrial Reference System**) – je systém, ktorého počiatok leží v ťažisku Zeme. ITRS je definovaný ako geocentrický pozemný systém, ktorého hlavný poludník je totožný s nultým poludníkom (Greenwich).

Java - je objektovo orientovaný programovací jazyk vyvíjaný spoločnosťou Oracle. Jeho syntax vychádza z jazykov C a C++. Zdrojové programy sa nekompilujú do strojového kódu, ale do medzistupňa, tzv. „byte-code“, ktorý nie je závislý na konkrétnej platforme.

MySQL - je voľne šíriteľný SQL relačný databázový server. MySQL je možné využívať na viacerých operačných systémoch a je implementovaný vo viacerých programovacích jazykoch. MySQL využíva relačný databázový systém typu DBMS. Každá databáza je v MySQL tvorená z jednej alebo z viacerých tabuliek, ktoré majú riadky a stĺpce. V riadkoch sa rozoznávajú jednotlivé záznamy, stĺpce udávajú dátový typ jednotlivých záznamov, pracuje sa s nimi ako s poľami. Práca s MySQL databázou je vykonávaná pomocou takzvaných dotazov, ktoré vychádzajú z programovacieho jazyka SQL.

NTFS - (**New Technology File System**) je označenie pre súborový systém, ktorý vyvinula spoločnosť Microsoft. NTFS používa 64-bitové adresy klastrov, takže diskový oddiel môže byť väčší ako u FAT.

DBMS – (**DataBase Management System**) systém riadenia databázy je softvérové riešenie, ktoré zabezpečuje prácu s databázou. Ide o aplikáciu, ktorá tvorí rozhranie medzi dátami uloženými v databáze a aplikáciami, ktoré využívajú dáta z databázy.

ODBMS – (**Object-oriented DataBase Management System**) je DBMS v ktorom sú informácie reprezentované vo forme objektov podobne ako v prípade objektovo-orientovaného programovania. Objektové databázy sú odlišné od relačných databáz, ktoré využívajú tabuľky.

ODBC (**Open DataBase Connectivity**) - je štandardizovaný API pre prístup k DBMS. ODBC poskytuje prístup, ktorý nie je limitovaný operačným systémom, programovacím jazykom alebo databázovým systémom. ODBC prepojí klienta so serverom a autentifikuje ho. Následne ODBC udržiava prepojenie medzi klientom a serverom. Pomocou SQL je možné realizovať rôzne operácie. ODBC taktiež uzatvára komunikačný kanál medzi klientom a serverom.

Oracle - je DBMS vyvíjaný spoločnosťou Oracle Corporation. Ide komerčný databázový systém, ktorý beží na viacerých operačných systémoch. DBMS má implementované viaceré nástroje s veľmi pokročilými možnosťami spracovania dát, vysokým výkonom a jednoduchou škálovateľnosťou.

PostGIS - je voľne šíriteľný softvér s otvoreným kódom. Ide o nadstavbu pre objektovo-relačný databázový systém PostgreSQL, ktorý pridáva podporu pre geografické objekty. PostGIS pracuje s geometrickými prvkami ako sú body, línie a polygóny, pričom je schopný vykonávať aj ďalšie operácie, ako napr. prienik prvkov, určenie vzdialenosti a plochy, priestorové a atribútové výbery.

PostgreSQL – niekedy sa označuje skratkou Postgres. Ide o objektovo-relačný databázový systém s otvoreným kódom. Funkcie (môžu sa označovať aj ako procedúry) umožňujú spúšťanie blokov kódov na serveri. Funkcie sú implementované v niekoľkých jazykoch, napr. SQL, Python, C, C++, Java a R. Výstupom funkcie je množina hodnôt, s ktorou pracovať prostredníctvom dopytov ako s tabuľkou.

QBE - (**Query by Example**) je databázový dopytovací jazyk pre relačné databázy. Bol vyvinutý v polovici 70-tych rokov 20. stor. paralelne s jazykom SQL. Ide o jeden z prvých grafických dopytovacích jazykoch využívajúc tabuľky, kde užívateľ môže zadávať príkazy a podmienky.

QGIS - **Quantum GIS**, je voľne šíriteľný a multiplatformný geografický informačný systém

R - je programovací jazyk a prostredie určené pre štatistickú analýzu dát a ich grafické zobrazenie. R disponuje širokou paletou rôznych štatistických a grafických nástrojov. R je možné jednoducho rozširovať pomocou funkcií a rozšírení. R komunita je známa aj tým, že často vychádzajú nové aktualizácie programových balíkov a rozšírení, ktoré obsahujú nové metódy spracovania dát, čím sa uľahčuje práca ďalším používateľom, ktorí môžu aplikovať už vyvinuté postupy na prácu s dátami.

RTI - **Reflectance Transforation Imaging** – metódy záznamu objektov pomocou mračna bodov. Metóda RTI je založená na automatickom generovaní mračna bodov z fotografií. Princíp tejto metódy spočíva v tom, že fotogrametrická kamera (alebo fotoaparát) je umiestnený na jednom mieste a skúmaný objekt je osvetľovaný z rôznych uhlov.

RVHP – **Rada vzájomnej hospodárskej pomoci** - hospodárska organizácia, ktorá vznikla v roku 1949 so sídlom v Moskve. Členskými krajinami boli ZSSR, Poľsko, Maďarsko, Rumunsko, Bulharsko, Nemecká demokratická republika, Československo, Albánsko, Mongolsko, Kuba, Vietnam a čiastočne aj Juhoslávia. Cieľom tohto hospodárskeho zoskupenia štátov bola koordinácia hospodárskeho vývoja členských krajín na princípoch centrálne plánovanej ekonomiky. Členské štáty sa snažili o rozvoj ekonomickej integrácie so špecifickým zreteľom na postupné vyrovnávanie diferenciácií ekonomickej úrovne jednotlivých členských krajín. Súčasťou hospodárskej spolupráce bola koordinácia plánovania výroby v členských krajinách, špecializácia v jednotlivých výrobných sektoroch a výmena výsledkov vedecko-technického vývoja. Postupným odklonom od zásad centrálne plánovanej ekonomiky a politickou transformáciou krajín sa RVHP rozpadla v roku 1991.

S-42 - je súradnicový systém používaný v minulosti hlavne pre vojenské mapy. Geodetickým základom je vyrovnaná astronomicko-geodetická sieť.

SAGA – (**S**ystem for **A**utomated **G**eoscientific **A**nalyses) je voľne šíriteľný geografický inforamčný systém s otvoreným kódom využívaný na editáciu priestorových dát. SAGA GIS je platforma vyvinutá pre implementáciu geovedných metód.

SFM - Structure from Motion – je to metóda založená na automatickom generovaní 3-D mračna bodov z dvojrozmerných obrázkov.

S-JTSK – **S**ystém **j**ednotnej **t**rigonometrickej **s**iete **k**atastrálnej – je súradnicový systém používaný v civilnom sektore (civilné mapové dielo) Tento súradnicový systém bol navrhnutý pre Křovakovo zobrazenie, najmä pre presné geodetické práce v oblasti evidencie nehnuteľností, avšak má široké uplatnenie aj v oblasti lesníctva, stavebníctva, DPZ a pod.

ZSSR - **Z**váz **s**ovietskych **s**ocialistických **r**epublík – bol štátny útvar, ktorý vznikol v roku 1922 a zanikol v roku 1991. Nástupnícke krajiny po ZSSR sú Rusko, Ukrajina, Bielorusko, Moldavsko, Gruzínsko, Arménsko, Azerbajdžan, Kazachstan, Uzbekistan, Turkménsko, Tadžikistan, Kirgizsko, Estónsko, Lotyšsko a Litva.

1 ÚVOD

Učebné texty s názvom *Priestorové analýzy a modelovanie* sú určené predovšetkým študentom magisterského štúdia študijného programu geografia a geoinformatika na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Obsah učebného textu nadväzuje na predmety bakalárskeho stupňa odboru geografia ako *Základy kartografie*, *Základy geografických informačných systémov*, *Praktikum z topografického mapovania*, *Geografické informačné systémy* a *Seminár z geoinformatiky*. Učebný text zodpovedá súčasnému vývoju vo vednom odbore geoinformatika a predstavuje často používané metódy priestorovej analýzy a priestorovej interpolácie. Cieľom úvodných kapitol učebného textu nie je suplovať predmety z bakalárskeho stupňa štúdia, ale zosumarizovať a nadviazať na ich poznatky. Modelovanie krajiny a jej procesov patrí medzi najzložitejšie operácie v geografickom informačnom systéme (GIS), nakoľko je potrebné neustále zohľadňovať komplexnosť skúmaného problému. Vzhľadom k tomu, že priestorové analýzy a modelovanie krajiny sa odohráva v GIS-e, je nevyhnutné pristúpiť k adekvátnej matematickej formulácii problému, navrhnúť algoritmus a implementovať postupy v podobe softvérového riešenia. Ide teda o najvyššiu úroveň používania GIS-u z hľadiska zložitosti a náročnosti, čo si vyžaduje aj vysoké nároky na kvalifikovanú obsluhu, ktorá nielen ovláda softvér, ale pozná aj podstatu modelovaného javu a taktiež aj skúmané územie. Učebný text je koncipovaný tak, aby užívateľ GIS-u nebol iba človekom, ktorý klikne na „čarovné tlačidlo“ čakajúc, aký výsledok to prinesie. Do jednotlivých kapitol sú zaradené viaceré príklady, vzorce, tabuľky, grafy a obrázky. Ich cieľom je demonštrovať postup jednotlivých výpočtov. Jednotlivé príklady, obrázky, tabuľky a grafy majú zároveň slúžiť aj ako sprievodca jednotlivými výpočtami.

Vo všeobecnosti by sme mohli povedať, že modely reprezentujú alebo opisujú najdôležitejšie prvky a vlastnosti skúmaného javu. Vyžadujú dobrú teoretickú formuláciu a formalizovaný zápis problému a vstupné dáta (merané alebo predpokladané). Cieľom modelovania je odhad správania sa javu za určitých podmienok, často s cieľom pripraviť dobré podklady pre rozhodovací proces. Vo výskumnej rovine je možné modely použiť aj na testovanie teoretických predpokladov a hypotéz, či výskum správania sa geopriestorových javov (Mitáš a Mitášová, 2000). Úlohou GIS-u v procese modelovania je poskytnúť komplexné prostredie na realizáciu viacerých krokov: príprava a vstup dát do modelu, programovacie prostredie, čiastkové geopriestorové operácie a nástroje na modelovanie, analýza a vizualizácia výsledkov.

V súčasnosti je v GIS-och implementovaných už mnoho modelov. Môžeme ich rozdeliť na modely prírodných javov, sociálno-ekonomických javov a ich vzájomnej interakcie. Napríklad z prírodných javov sú časté hydrologické a geomorfologické modely. V sociálno-ekonomickej oblasti sú veľmi časté modely dopravných systémov, rastu miest a populácie, či priestorovej distribúcie ekonomických aktivít. Z geoinformatického hľadiska je dôležité, v akých priestorových jednotkách prebieha modelovanie. Či sú to priestorovo distribuované modely využívajúce maximálne rozlíšenie použitého dátového modelu alebo ide o schematické modelovanie s veľkými, priestorovo homogénnymi územnými jednotkami bez vnútorného rozlíšenia (napríklad povodia, kraje a pod.). To často predurčuje aj územný rozsah modelovania, detailné, priestorovo distribuované modelovanie je časté skôr pre menšie územia, z ktorých je dostatok vstupných dát a aj výpočtová náročnosť je prijateľná.

Empirické modely využívajú podrobnú štatistickú analýzu sledovaného javu. Na základe dlhodobého sledovania je možné predpokladať analogický vývoj v porovnateľných podmienkach. Fyzikálne, či procesne orientované modely sa sústreďujú na detailný popis fungovania javu na základe fyzikálnych, či chemických procesov a ich matematickej formulácie.

Rozlišujeme tieto základné typy modelov (Mitáš a Mitášová, 2000):

- deterministické (často využívajú popis pomocou diferenciálnych rovníc),
- stochastické (využívajú náhodný charakter skúmaného javu a ich popis pomocou teórie pravdepodobnosti),
- modely na báze pravidiel (bunkové automaty),
- multiagentné systémy (aplikujú sa do lokálnych pravidiel ako faktor/agent v systéme).

Modely môžu byť implementované v GIS-e rôznym spôsobom. Pri plnej integrácii je model kompletne naprogramovaný ako integrálna súčasť GIS-u s využitím vlastného programovacieho prostredia. Model funguje ako jeden z jeho príkazov. Model priamo využíva dáta v GIS-e, nie sú potrebné externé vstupy dát. Modely naprogramované v niektorom zo skriptovacích jazykov však môžu byť pomalšie. Pri voľnejšom prepojení je model naprogramovaný mimo GIS-u, využíva však používateľské rozhranie. Má vlastné dátové štruktúry, ktoré sa automatickým spôsobom konvertujú. Pri najvoľnejšom prepojení model funguje mimo GIS-u, ale prostredníctvom vstupu a výstupu dát je možné model používať spoločne s GIS-om.

Vývoj a implementácia modelov do GIS-u predstavuje pomerne náročný proces. Súčasné GIS-y umožňujú určitú mieru prispôbenia GIS softvéru (*customization*). Relatívne najviac transparentný a najjednoduchší je tento proces pre softvér s otvoreným zdrojovým kódom (napr. GRASS, QGIS, SAGA). Vývojár musí dodržať určité pravidlá vývoja, využíva pritom existujúce systémové prostriedky. Príkazy GIS-u sú zvyčajne vytvárané modulárnym spôsobom, takže je možné ich relatívne jednoducho pridávať, odoberať alebo modifikovať. Programovanie prebieha v štandardných programovacích jazykoch ako ANSI, C++ či Java. V prípade komerčných, proprietárnych systémov je situácia zložitejšia, lebo vlastník produktu nezverejňuje celý kód softvéru, ale len poskytuje prístup k softvérovému dátovému modelu a základnú informáciu o možnostiach meniť, dopĺňať existujúce funkcie. Úpravy a vývoj nástrojov sa často opiera o nové programovacie nástroje a prostredie, ako sú IDE (Integrated Development Environment), či .NET. Pre vývojára rozširujúceho existujúce funkcie, či moduly GIS-u je dôležité poznanie API (Application Programming Interface) konkrétneho softvéru, ktorý mu uľahčuje využívanie systémových prostriedkov (funkcií) softvéru.

Medzi kľúčové aspekty použitia modelov v praxi je porovnanie so skutočnosťou, do akej miery model reprezentuje skúmaný jav. Prípadné nedostatky môžu byť spôsobené viacerými príčinami: nedostatočný teoretický popis javu, nevhodný dátový model a jeho úroveň priestorového detailu (rozlíšenie), nevhodná aplikácia modelu mimo predpokladaný rozsah podmienok, chyby vo vstupných dátach. Častým problémom modelov je nedostatok, či nízka kvalita vstupných dát. Preto mnohé modely sa kalibrujú. V modeli sa aplikujú dáta (parametre) s hodnotami v rozsahu prípustného intervalu a jeho výsledky sa porovnávajú so skutočnosťou. Analyzuje sa citlivosť modelu na zmenu dát, vplyv chyby na celkový výsledok (*error propagation*) a jeho neurčitosť.

Chcel by som sa poďakovať recenzentom prof. Mgr. Jaroslavovi Hofierkovi, PhD. a doc. RNDr. Dagmar Kusendovej, CSc. za starostlivé prečítanie učebného textu a za ich postrehy a pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu tohto textu.

2 KONCEPTUÁLNA REPREZENTÁCIA KRAJINY V GIS

Základným východiskom pre modelovanie krajiny a procesov prebiehajúcich v nej je ich abstrakcia a digitálne vyjadrenie pomocou vhodnej štruktúry dátových modelov. Navrhnutie dátových modelov je však závislé na povahe skúmaných javov, ktoré sa opiera o rôzne koncepty reprezentácie krajiny. Voľba vhodnej štruktúry dátového modelu je pre výsledok modelovania a následnú interpretáciu skúmaného javu veľmi dôležitá.

V geoinformatike sa vytvorili dva základné konceptuálne prístupy ku reprezentácii objektov a javov v krajine – diskrétné objekty (*entities*) a spojité polia (*fields*) (Burroughs, McDonnell 1998). **Diskrétné objekty** majú presne definované hranice a sú spočítateľné. Medzi takéto objekty patria dopravné komunikácie, hranice administratívnych jednotiek, sídla, obyvatelia. **Spojité** (fyzikálne) **polia** predstavujú priestor krajiny, v ktorom sa spojitým menia hodnoty určitých fyzikálnych veličín charakterizujúce skúmané objekty alebo javy. Najmä v prírodnej časti krajiny je výskyt spojitých fyzikálnych polí bežný. Typickým príkladom je nadmorská výška, ktorá môže byť meraná v ľubovoľnom mieste a spravidla nemá nespojité okraje hodnôt distribuovaných v priestore, ako napríklad budova. Príklady takýchto javov sú viaceré - tiažové pole Zeme, teplota vzduchu, tlak vzduchu, kontaminácia vzduchu rôznymi prvkami, slnečné žiarenie a pod.

Fyzikálne polia reprezentujúce rôzne prvky a javy v krajine rozlišujeme na:

- a) skalárne polia;
- b) vektorové polia;
- c) tenzorové polia.

Skalárne polia obsahujú fyzikálne veličiny vyjadrené jedným údajom definujúcim veľkosť (napr. teplota, hustota, pH). **Vektorové polia** obsahujú fyzikálne veličiny určené dvoma údajmi. Jeden údaj sa vzťahuje na veľkosť a druhý určuje smer (napr. tlak, rýchlosť, zrýchlenie). **Tenzorové polia** sú určené viac ako dvoma údajmi. Pomocou tenzorových polí sa vyjadrujú vlastnosti deformovaných prostredí, anizotropné vlastnosti látok a podobne. Ich využitie je možné napríklad pri skúmaní napätia a deformácií horninového prostredia, v definíciách krivostí povrchov a priestoru. (Hofierka 1997a, 2003). V krajine sa fyzikálne polia môžu vyskytovať ako dvojrozmerné (napr. georeliéf), kde poloha bodu s konkrétnou hodnotou sledovanej veličiny je vyjadrená dvoma nezávislými premennými, trojrozmerné (obsahujú tri nezávislé premenné priestoru) alebo až štvorrozmerné (štvrtou nezávislou premennou je čas).

Konceptuálne modely krajiny slúžia najmä ako základ pre digitálnu parametrizáciu objektov a javov v pamäti počítača tak, aby ich čo najlepšie reprezentovali a aby ich bolo možné použiť pre ďalšie analýzy. Keďže počítač pracuje s digitálnymi a diskrétnymi dátami je nevyhnutné definovať také dátové modely, ktoré umožňujú najmä:

- a) spracovanie údajov v pamäti počítača;
- b) vizuálne vyjadrenie reprezentovaného javu;
- c) matematické operácie.

V súčasnosti sú často využívané dva základné dátové modely:

- a) rastrový;
- b) vektorový.

Pri výbere dátového modelu je potrebné zohľadniť viacero kritérií, napr.:

- c) charakter skúmaného javu (spojitý alebo diskrétny);
- d) aké je priestorové rozloženie hodnôt údajov;
- e) aké metódy boli použité pri zbere geodát;
- f) aké sú nároky na presnosť a detailnosť údajov;
- g) aké sú nároky na reprezentáciu krajiny z hľadiska dimenzionality (dvojdimenzionálne, trojdimenzionálne, n-dimenzionálne);
- h) aké analýzy s týmito dátami chceme ďalej vykonávať.

V súčasnej dobe značne ovplyvňujú výber dátového modelu najmä metódy zberu priestorových geoúdajov, pre ktoré je typickou črtou ich výstupného záznamu mračno bodov. Ide napríklad o laserové skenovanie, radar, metódy založené na automatickej fotogrametrii (napr. *Structure from Motion – SFM*; *Reflectance Transformation Imaging – RTI*) a pod.

Väčšina súčasných GIS-ov umožňuje pracovať s oboma dátovými modelmi a vykonávať medzi nimi konverzie. Rastrový dátový model je vhodnejší pre modelovanie spojitých, plynulo sa meniacich prírodných javov (napr. reliéf, atmosférické javy), kým vektorový dátový model je výhodný najmä pre diskkrétne javy časté v humánnej geografii (napr. vyjadrenie plôch, hraníc, dopravných komunikácií). Rastrový dátový model je v počítačovom prostredí jednoduchší na spracovanie a mnoho zariadení pre zber a výstup dát používa rastre (skenery, tlačiarne). Vektorový dátový model na druhej strane umožňuje lepšie vystihnúť priestorové, topologické vzťahy medzi jednotlivými prvkami modelovanej reality, čo je veľkou výhodou najmä pri topologických analýzach. Ďalšie výhody a nevýhody oboch dátových modelov sú uvedené v Tab. 2.1. Konverzia z vektorového dátového modelu do rastrového je z hľadiska polohovej presnosti zvyčajne menej problematická ako naopak.

Kritérium	Raster	Vektor
objem dát	závisí od rozlíšenia	závisí od hustoty bodov
zdroj dát	DPZ, skenery	humánno-geografické a environmentálne
aplikácie	prevažne environmentálne	spoločenské, ekonomické, technické
rozlíšenie	pevné	premenlivé

Tab. 2.1: Porovnanie rastrového a vektorového dátového modelu.

Ďalším dôležitým parametrom pri práci s priestorovými geoúdajmi je dimenzionalita. Z hľadiska vyjadrenia tvaru a polohy objektov a javov môžeme konštatovať, že všetky javy na zemskom povrchu alebo v jeho blízkosti môžeme vyjadriť pomocou súradníc x , y , a z (čiže majú trojrozmerný resp. trojdimenzionálny charakter). V súčasnosti sa často v GIS-och pri rôznych typoch úloh a aplikácií používa dvojrozmerná reprezentácia. Má to viacero dôvodov:

- kartografická tradícia analógových máp je založená na dvojrozmernom vyjadrení objektov a javov do roviny. Dvojrozmerné údaje tvoria značnú bázu vstupných údajov, ide napríklad o historické mapy, topografické mapy, ortofotomapy a pod.;
- zjednodušenie a abstrakcia javov pomocou dvojrozsmernej reprezentácie značne uľahčuje ich modelovanie z hľadiska nárokov na algoritmizáciu a automatizáciu výpočtov, ako aj nárokov na výpočtovú kapacitu počítačov;
- skúmanie a vyjadrenie rôznych objektov a javov pomocou dvojrozsmernej reprezentácie je postačujúce pre analýzy. Navyše v prípadoch, keď je interakcia medzi jednotlivými prvkami v horizontálnom smere dominujúca, zanedbanie vertikálnej zložky uľahčuje chápanie, interpretáciu a hodnotenie rôznych procesov a javov v krajine.

Krajina je však trojrozmerný a dynamický objekt, takže vhodnosť a výhody 3D a aj 4D reprezentácie je potrebné neustále konfrontovať s úlohou, ktorú chceme riešiť. (Kaňuk et al. 2015) Trojrozmerné a štvorrozmerné dátové modely sa bežne využívajú najmä v špecializovaných softvéroch na 3D vizualizáciu a modelovanie rôznych javov, napr. meteorologických, geologických, archeologických. Existujú však aj programy GIS, ktoré umožňujú práce s 3D dátovými modelmi (napr. GRASS GIS, ArcGIS). Na druhej strane je potrebné uviesť, že implementované analytické nástroje v GIS umožňujúce komplexnejšie priestorové analýzy 3D nie sú v súčasnosti plne využité.

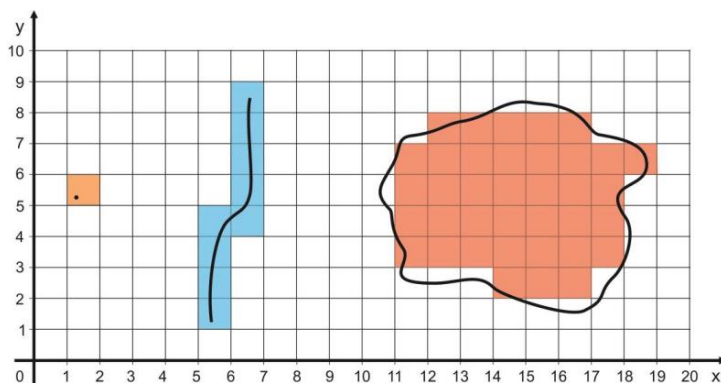
2.1 Rastrový dátový model

Rastrový dátový model (raster, grid) predstavuje spravidla pravidelnú mozaiku, mriežku hodnôt s atribútmi vyjadrujúcimi vlastnosti krajiny. Ako uvádzajú Hofierka (2003), Lloyd (2010), Tuček (1998) a ďalší, v praxi sa často používa raster na vyjadrenie prvkov krajiny na báze konceptuálnej reprezentácie formou fyzikálnych polí. Rastrový dátový model je následne spravidla určený pomocou spojitých matematických funkcií, ktorých výsledok je zapísaný do dátovej matice. Využitie rastrového dátového modelu je časté aj pre vyjadrenie digitálneho záznamu obrazu v oblasti DPZ. Najčastejšie používaným rastrom je štvorcová alebo obdĺžniková mriežka, v niektorých prípadoch je použitá hexagonálna alebo pravidelná trojuholníková mriežka. Základným, elementárnym prvkom rastra je bunka. V prípade digitálnych obrazov sa označuje pojmom pixel odvodený z anglického slova picture element (obrazový element). V prípade 3D reprezentácie má bunka tvar kocky alebo kvádra. 3D ekvivalent pojmu pixel je voxel (volume element). Znázornenie bodu, línie a plochy v rastrovom dátovom modeli je na obr. 2.1.

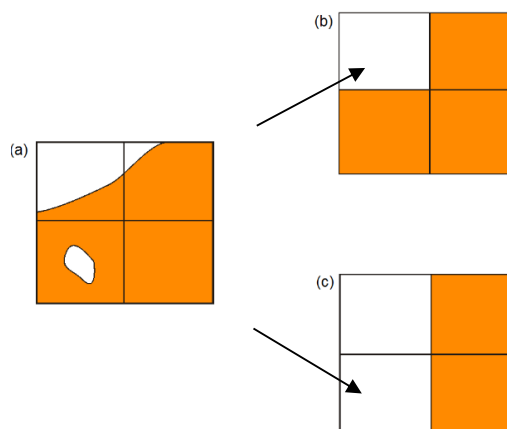
Ako uvádza Hofierka (2003) a Hofierka et al. (2014) a ďalší, pravidelný raster má viaceré výhody. Raster by sme mohli definovať ako dátový súbor, ktorého zápis údajov je štruktúrovaný do matice, pričom jeden údajov v matici predstavuje číslo reprezentujúce jednu bunku. Bunka je teda nositeľom jednoznačnej informácie, ktorá sa vzťahuje na celú plochu, ktorú bunka pokrýva. Údaje môžu zachytávať kvalitatívne alebo kvantitatívne ukazovatele skúmaného javu. Takéto spracovanie údajov má viaceré výhody, napr. jednoduchosť z hľadiska spracovania v počítači, jednoznačnosť informácie zapísanej do matice, topologická jednoduchosť, menšie nároky na úložiskovú kapacitu v pamäti počítača pod.

Na druhej strane raster svojou štruktúrou zápisu spôsobuje generalizáciu tvarov, keďže hodnota zapísaná v matici údajov sa vzťahuje na celú plochu bunky, a teda, nemusí vyjadrovať geometricky presne skúmaný objekt alebo jav. Z toho dôvodu je potrebné pri práci s rastrom definovať takú veľkosť bunky, ktorá by z priestorového hľadiska dobre reprezentovala modelovaný jav. Základným parametrom rastra je rozlíšenie, ktoré je určené veľkosťou bunky, resp. plochou ku ktorej sa vzťahuje hodnota rastra. Veľkosť bunky sa môže v GIS-e definovať rôznymi spôsobmi, najčastejšie sa vyjadruje veľkosťou bunky v metroch.

Pri práci s rastrovými údajmi je každý analytik postavený pred otázku, ako určiť vhodnú veľkosť bunky rastra. Niektoré postupy a odporúčania zhrnul vo svojej práci Hengl (2006). V zásade platí, že rozlíšenie rastra závisí v prvom rade na druhu zdrojových dát a na type riešenej úlohy. Ďalej je dôležité definovať rozlíšenie rastra tak, aby daný jav bol vhodne priestorovo a geometricky reprezentovaný. To znamená, že rozlíšenie rastra musí dobre vystihnúť jav aj v miestach s jeho prudkými zmenami a na miestach s redším výskytom jedinečných hodnôt. Určitou nevýhodou tohto dátového modelu je redundancia (nadbytočnosť) dát na území s malými zmenami javu. V niektorých prípadoch môže výrazne ovplyvniť rozloženie hodnôt v rastri aj voľba kritéria, či daný jav má alebo nemá byť reprezentovaný príslušnou hodnotou bunky v rastri. Môže ísť o prípady, keď daný jav len čiastočne zasahuje do bunky rastra. Najčastejšie sa používa pravidlo väčšinového podielu a pravidlo centrálného bodu (obr. 2.2). Tieto kritériá sa používajú aj pri konverzii rastrových dát.



Obr. 2.1 Znázornenie bodu, línie a plochy v rastrovom dátovom modeli.



Obr. 2.2 Použitie pravidla (b) väčšinového podielu a (c) centrálneho bodu. (upravené podľa Longley et al., 2011)

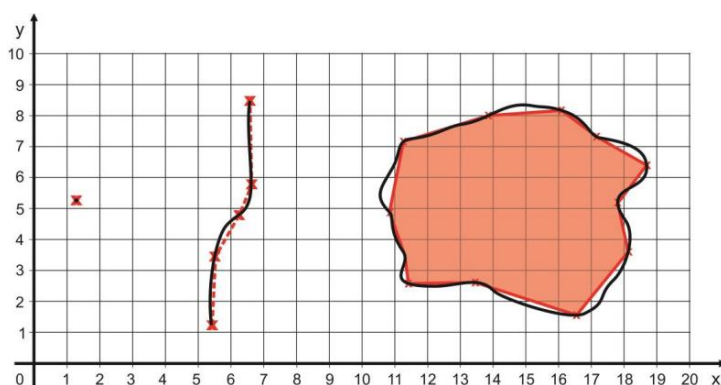
V pamäti počítača je raster uložený ako matica hodnôt. Dôležitou súčasťou zápisu rastra je hlavička súboru, ktorá musí obsahovať isté parametre, ako sú počet stĺpcov, počet riadkov, veľkosť bunky rastra, údaje o súradnicovom systéme a pod. (obr. 2.3). V rastri môžu byť zaznamenané rôzne typy hodnôt, napr. čísla (celé - dátový typ *integer* alebo reálne - dátový typ *float/double*). Pri digitálnej reprezentácii geografického javu pomocou rastra je potrebné definovať tieto parametre rastra aj s ohľadom na reprezentovaný jav a plánované GIS operácie. Napríklad z hľadiska úložiskovej kapacity a mapovej algebry je vhodnejšie krajinnú pokrývku reprezentovať pomocou číselných kódov (napr. 1,2,3,...) a nie pomocou textového reťazca (napr. "ihličnatý les").

```
ncols      20
nrows      10
xllcorner   0
yllcorner   0
cellsize    1
NODATA_value -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 3 -9999 -9999 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 3 3 3 3 -9999 -9999
-9999 1 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 3 3 3 3 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 2 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 3 3 3 3 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 3 3 3 3 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 3 3 3 -9999 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999
-9999 -9999 -9999 -9999 -9999 2 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999 -9999
```

Obr. 2.3: Zápis matice hodnôt rastra zobrazovaného na obr. 2.1 vo formáte ASCII grid.

2.2 Vektorový dátový model

Kým jednotlivé bunky v rastrovom dátovom modeli sú jednoducho vyjadrené pomocou ich pozície v stĺpcoch a riadkoch, vektorový dátový model obsahuje explicitne definované priestorové súradnice jednotlivých častí, ktoré vytvárajú objekty. Objekty a javy nachádzajúce sa v krajine sú vo vektorovom dátovom modeli vyjadrené pomocou bodov, línií a polygónov. **Body** sú vyjadrené pomocou súradníc x a y (môžu byť k nim priradené aj ďalšie atribúty vzťahujúce sa na kvantitatívne alebo kvalitatívne charakteristiky, prípadne z súradnicu, ktorá spravidla vyjadruje nadmorskú výšku). Spravidla sa pomocou bodov vyjadrujú napr. kóty, mestá, adresy (tzv. adresné body), a pod. **Línie** sa skladajú z reťazca bodov-vrcholov spojených navzájom úsečkami (alebo oblúkmi). Plochy sú definované podobne ako línie, avšak začiatkový a koncový bod línie je totožný, čím vzniká uzatvorená plocha (obr. 2.4).



Obr. 2.4: Znáznorenie bodu, línie a plochy vo vektorovom dátovom modeli.

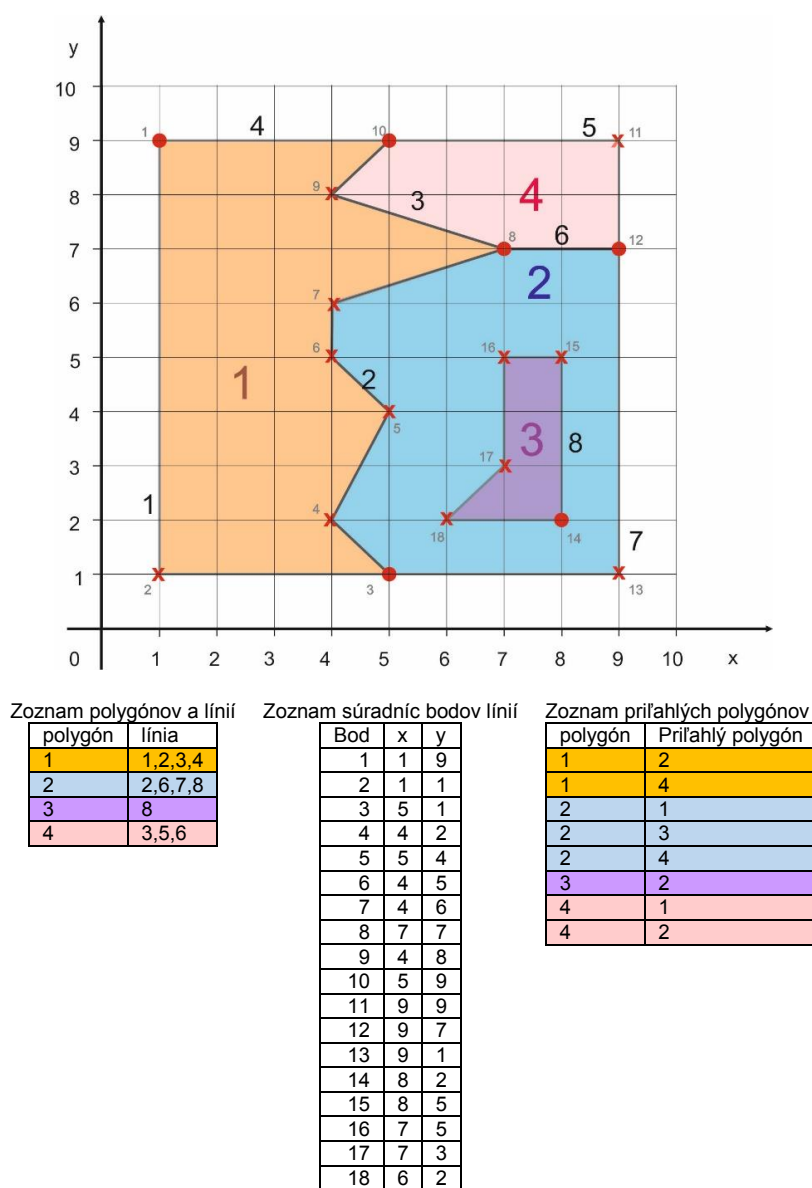
Línie sú definované súradnicami bodov. Na obr. 2.5 môžeme identifikovať dve formy bodov a) vrcholy (*vertex*), ktoré reprezentujú zmenu smeru čiary (prípadne zmenu trajektórie oblúka) a b) uzly (*node*), ktoré reprezentujú začiatočný a koncový bod. Vektorové dáta sú uložené v pamäti počítača pomocou súradníc bodov a často aj topologických väzieb. Pomocou topológie sa vyjadrujú priestorové súvislosti, väzby medzi jednotlivými geometrickými prvkami (napr. spoločná hranica polygónov a podobne). Kvantitatívne alebo kvalitatívne vlastnosti objektov sú vyjadrené atribútmi, t.j. číselnými hodnotami alebo textom. Pri vektorovom dátovom modeli je vyjadrenie priestorového rozlíšenia, resp. miery detailu reprezentácie krajiny zložitejšie, pretože sa zvyčajne mení od miesta k miestu. Môžeme však hovoriť o mierke ekvivalentnej papierovej mapy. Napríklad, obsah papierových máp býva často prevádzaný do digitálnej podoby, t.j. vektorizovaný. V porovnaní s rastrovým dátovým modelom nie je potrebná redundancia dát a z tohto hľadiska je to úsporný spôsob reprezentácie krajiny. Priestorové jednotky a miera detailu sa prispôbujú priestorovej variabilite skúmaného javu. Existujú 3 základné vektorové dátové modely: špagetový, topologický a hierarchický (Tuček, 1998). Špagetový je najjednoduchší, je to jednoduché uloženie priestorovej informácie o každom objekte samostatne. Každý objekt je definovaný sadou priestorových súradníc, ale neobsahuje žiadne informácie o vzťahoch k susedným objektom. Pokiaľ chceme použiť tento model a mať presnú reprezentáciu objektov krajiny, je potrebné pomerne náročné ručné spracovanie dát. Inak môže obsahovať veľa nedostatkov, napríklad netotožné, či dvojité hranice medzi susednými polygónmi, nedotiahnuté, či naopak prekračujúce línie a podobne.

K vektorovým dátovým modelom môžeme zaradiť aj špeciálny vektorový dátový model v tvare nepravidelnej trojuholníkovej siete (*Triangulated Irregular Network – TIN*), ktorý sa využíva v digitálnych modeloch reliéfu. Nepravidelná trojuholníková sieť je topologická štruktúra, ktorá obsahuje informácie o jednotlivých trojuholníkoch a ich susedoch. Tejto problematike sa venuje samostatná kapitola (6.4).

Topologické vzťahy medzi vektorovými údajmi

Geometrické vlastnosti objektov sú v topologickom zmysle reprezentované topologickými prvkami uzol, vrchol, hrana, reťazec, polygón. Spôsob reprezentácie bodového, líniového a plošného objektu je znázornený na obr. 2.4. Pri topologickom a hierarchickom modeli sa analyzujú väzby, vzťahy medzi objektami a táto topologická informácia je uložená aj v databáze (obr. 2.5). Vďaka topológii je možné ľahko určovať susedské vzťahy medzi geometrickými prvkami a objektmi, analyzovať či jeden objekt obsahuje iný, vnorený objekt, nachádzať prieniky objektov a podobne. Vektorový dátový model s topologickými väzbami je všeobecne náročnejší na prípravu a spracovanie dát najmä v oblasti definovania topologických väzieb. Tie však pomáhajú identifikovať prípadné geometrické nepresnosti a aj ponúkajú väčšie možnosti v priestorových analýzach. Príkladom využitia topologickej informácie je sieťová analýza hľadania optimálnej trasy v rámci siete dopravných komunikácií, kde je dôležité mať informácie o prikázaných smeroch jazdy, resp. možnostiach odbočenia a slepých uliciach. Vďaka

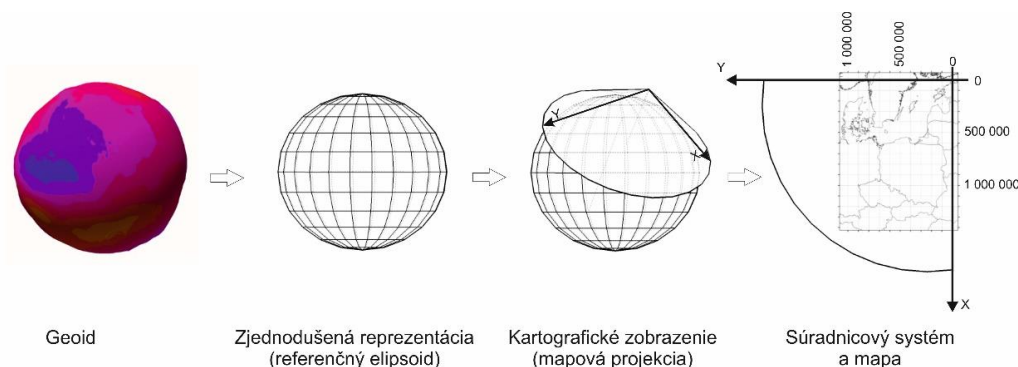
tomu je napríklad možné optimalizovať trasu doručovania zásielok, čo výrazne znižuje čas doručenia a náklady.



Obr. 2.5 Znáozornenie topologických vzťahov pri vektorovom dátovom modeli

2.3 Geografická poloha

Základom pre prácu s geopriestorovými dátami v GIS-e je skutočnosť, že všetky dáta o krajine sú polohovo lokalizované, resp. je k nim priradený aj údaj o geografickej polohe. Skutočný povrch Zeme je veľmi zložitý, preto aj definovanie geografickej polohy je pomerne náročná úloha. Aby bolo možné určiť polohu krajinných objektov a javov, dochádza ku zjednodušeniu skutočného tvaru Zeme nahrádzaním rôznych telies a povrchov, ktoré je možné matematicky vyjadriť. Následne je možné pomocou projekcií zobraziť zemský povrch do roviny a definovať súradnicové systémy, v ktorých sa poloha krajinných objektov a javov vyjadruje (or. 2.6). Problematika kartografických zobrazení a súradnicových systémov je podrobne rozpracovaná. V predkladanej kapitole sa chceme venovať základným pojmom a princípom, ktoré sú pre prácu s priestorovými informáciami v GIS-e nevyhnutné.

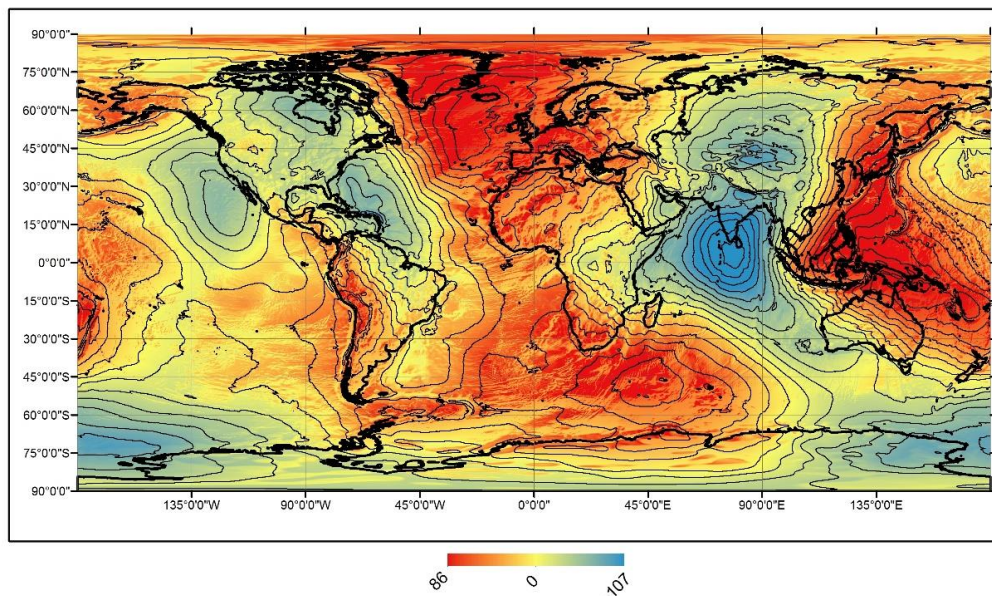


Obr. 2.6: Schéma priebehu zobrazovania objektov na zemskom povrchu do mapy (na príklade Křovákovho zobrazenia so súradnicovým systémom S-JTSK).

Skúmanie skutočného tvaru Zeme má veľký význam pre vyjadrenie polohy a tvorbu máp, resp. záznamu polohy pomocou geografických súradníc. Prvé pokusy o vyjadrenie skutočného tvaru Zeme siahajú do dôb antiky, kde na základe rôznych pozorovaní viacerí učitelia dospeli k záveru, že Zem má guľovitý tvar (napr. loď strácajúca sa na obzore, zatmenie Mesiaca a pod.). Avšak až v období renesancie sa tvar Zeme začal skúmať podrobnejšie pomocou rôznych vedeckých metód. Veľmi dôležitým poznatkom, ktorý na základe fyzikálnych meraní zistil Isac Newton bolo, že Zem nemá tvar pravidelnej gule, ale je na póloch sploštená. Podrobnejším skúmaním a meraniami sa postupom času vytvárala predstava o skutočnom tvare Zeme a komplikovanosti jeho povrchu, čo významne sťažovalo úlohu kartografie zobrazovať objekty a javy nachádzajúce sa na zemskom povrchu na mape tak, aby v mape (obraze skutočného sveta) ostali dôležité informácie, resp. aby ich bolo možné odvodiť, napr. topológia objektov (kto je sused s kým?), vzdialenosti medzi objektmi, meranie uhlov alebo rozlohy územia a pod. (kartometria – meranie na mapách).

Základným východiskom pre tvorbu máp je vyjadrenie povrchu, resp. telesa reprezentujúceho skutočný tvar Zeme. Samotný povrch Zeme, ktorý vznikol pôsobením endogénnych a exogénnych procesov, je veľmi zložitý. Z tohto dôvodu bolo nevyhnutné definovať zjednodušenú plochu, ktorú je možné matematicky definovať. Geoid zaviedol v roku 1873 J. B. Listing, ktorý vychádzal z toho, že Zemské teleso vytvára nad svojím povrchom gravitačné pole, v ktorom pôsobí Newtonov zákon. Berúc do úvahy aj odstredivú tiaž vplyvom rotácie Zeme, je možné určiť tiažové pole Zeme a identifikovať hladinové plochy, ktoré sú v každom bode kolmé na smer zemskej tiaže. Ak by bola Zem ideálne tekutá a jej hladina by bola ovplyvnená iba tiažovým poľom Zeme, tak by Zem vytvárala ideálny povrch. *Geoid* by sme mohli definovať ako ekvipotenciálnu plochu (plocha s konštantným tiažovým potenciálom na svojom povrchu, $W_0 = \text{konšt.}$), ktorá sa najviac primýka strednej ľudovej hladine mora a zároveň prechádza daným výškovým bodom. Nakoľko Zem je tvorená heterogénnym materiálom s rôznym zložením a hustotou, výpočet geoidu nie je možný, nakoľko nepoznáme rozloženia hmoty a jej hustoty pod zemským povrchom. Geoid je ideálnou plochou, pre ktorú je možné vzťahovať výšky. Avšak problém vyjadrenia geoidu a teda aj vyjadrenia nadmorskej výšky je omnoho zložitejší, preto dochádza k jeho regularizácii (harmonizácii). Pre vyjadrenie geoidu sa v súčasnosti používa jeho sférická harmonická reprezentácia vypočítaná z radu koeficientov označovaných ako EGM 2008 (Earth Gravity Model 2008, obr. 2.7).

Geoid sa využíva hlavne v geodézii, pričom jeho úloha spočíva predovšetkým v tom, že je základom pre vyjadrenie zjednodušenej reprezentácie zemského povrchu (referenčné teleso) a vyjadrenie nadmorskej výšky.

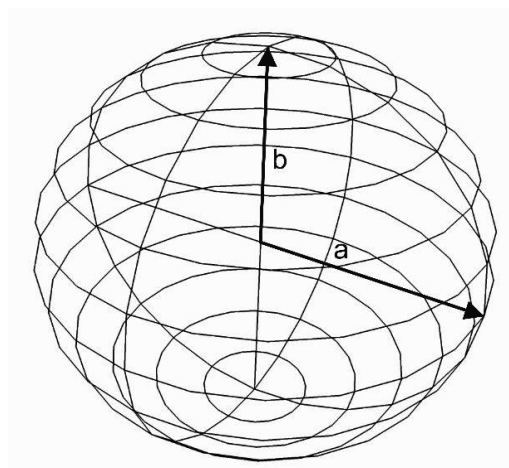


Obr. 2.7 Výška geoidu EGM 2008 nad referenčným elipsoidom WGS 84 vyjadrená v metroch (interval izolínií 10 m).

V roku 1945 predstavil ruský geodet Molodenskij novú koncepciu riešenia tvaru Zeme. Vychádzal z teórie určovania výšok na základe povrchových nivelačných a tiažových meraní bez použitia hypotéz a rozložení hustoty hmoty medzi geoidom a zemským povrchom. S tým súviselo zavedenie pojmu kvázigeoid. Ide o analytickú plochu veľmi podobnú geoidu (rozdiel výšok je približne 2 m v závislosti od lokality), ktorej presnosť je limitovaná presnosťou merania, pričom v oblastiach morí a oceánov splýva s geoidom.

Geoid sa ďalej nahrádza inými jednoduchšími matematicky opísateľnými plochami, ktoré vystihujú jeho tvar a používajú sa na premietanie objektov. Všetky plochy využiteľné na zobrazovanie povrchu Zeme sú konštruované v závislosti od tvaru, polohy a veľkosti územia, ako aj od účelu mapy, pričom sú vyjadrené matematickými funkciami. V kartografii sa používajú tri *referenčné* geometrické plochy. Ide o rotačný elipsoid, guľu a rovinu.

Rotačný elipsoid zvolený pre určitý *geodetický systém* sa označuje taktiež ako *referenčný elipsoid*. Referenčné elipsoidy sú definované na základe astronomických a geodetických meraní zemského telesa. V minulosti sa parametre jednotlivých elipsoidov určovali pomocou tzv. terestriálnych (pozemných) meraní. Z rôzne rozsiahlych a rôzne presných meraní boli určené parametre viacerých zemských elipsoidov. Plochu geoidu by najlepšie vystihoval trojosý elipsoid, avšak kvôli zložitej geometrii sa v praxi používajú zásadne dvojsové (rotačné) elipsoidy. Dvojsový elipsoid (obr. 2.8) vzniká otáčaním elipsy okolo malej (vedľajšej) osi (os totožná s osou zemskej rotácie) a veľkej (hlavnej) osi (os leží v rovine rovníka).



Obr. 2.8 Schéma rotačného elipsoidu.

Každý dvojosý rotačný elipsoid je charakterizovaný polosami (a , b), ako aj excentricitou (e), ktorú vyjadrujeme pomocou funkcie

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

a sploštením (i) vyjadrené funkciou

$$i = \frac{a - b}{a}$$

Normálny (hladinový) *elipsoid* môžeme definovať ako rotačný elipsoid, ktorý je vytvorený na základe určenia vonkajšieho tiažového poľa Zeme (t.j. tiažového poľa na a nad zemským povrchom). Normálnemu elipsoidu sa okrem geometrických parametrov (veľkosť polosí a sploštenie) udávajú aj fyzikálne parametre Zeme (hmotnosť Zeme, uhlová rýchlosť rotácie Zeme, tiažové zrýchlenie, geocentrický gravitačná konštanta a ďalšie fyzikálne parametre). Normálne tiažové pole normálneho tvaru Zeme sa potom určuje na základe gravitačných a rotačných účinkov. Za *stredný zemský elipsoid* sa označuje taký elipsoid, ktorého parametre najlepšie zodpovedajú reálnej Zemi. Takýchto elipsoidov bolo určených viacero, napr. Besselov elipsoid, Krasovského a mnohé ďalšie.

Ďalším dôležitým parametrom je určenie tzv. *referenčného bodu elipsoidu*. Je to miesto na zemskom povrchu, ktorým je vedená ťažnica na geoid a ktorá je zároveň totožná s normálou referenčného telesa pri definovaných parametroch elipsoidu (rozmery polosí a orientácia). Napríklad pre územie Ruska je použitý Krasovského elipsoid s referenčným bodom elipsoidu prechádzajúcim hviezdárňou v Pulkove, pre Nemecko je použitý Besselov elipsoid s referenčným bodom elipsoidu prechádzajúcim Helmer Hurn a pod. V anglickej literatúre sa špecifikácie referenčného elipsoidu pre určité územia a jeho presná orientácia označuje pojmom *datum*.

V geodetickej a kartografickej praxi sa na Slovensku používa niekoľko elipsoidov (Tab. 2.2). Pre civilné mapy v Křovákovi zobrazení sa používa Besselov elipsoid, ktorý bol odvodený F. W. Besselom v roku 1841. Bessel odvodil parametre elipsoidu na základe desiatich stupňových meraní, pričom sa používa ako referenčná plocha topografických máp vo viacerých krajinách prevažne strednej Európy, okrem Slovenska a Česka aj napr. v Nemecku, Rakúsku, Švajčiarsku, Holandsku. Pre vojenské mapy sa po 2. svetovej vo všetkých štátoch bývalej Varšavskej zmluvy (teda aj v Československu) využíval pre Gaussovo-Krügerovo zobrazenie Krasovského elipsoid. Krasovský odvodil jeho parametre na základe rozsiahlych astronomických, geodetických a gravimetrických meraní na území Ruska. Po vstupe Slovenska do Severoatlantickej aliancie sa v súvislosti so zavedením zobrazenia UTM (Universal Transverse Mercator) začal využívať Hayfordov elipsoid. Uvedené elipsoidy nemajú svoj stred totožný s ťažiskom Zeme, pretože boli skonštruované na základe meraní častí zemského povrchu (pre vybrané územia, napr. Severná Amerika, Stredná Európa, bývalé ZSSR a pod.) a boli navrhnuté tak, aby čo najlepšie vystihovali priebeh geoidu v týchto územiach. V minulosti sa využíval aj stredný zemský elipsoid GRS 1980, z ktorého vychádza

terestrický súradnicový systém ETRS 89, od roku 1991 nahradený WGS 84. Najnovší referenčný elipsoid je WGS 84, ktorý bol odvodený z družicových meraní, má globálny charakter a jeho stred je totožný s hmotnostným stredom Zeme. Jeho povrch sa primyká k povrchu geoidu s odchýlkou 60 m. WGS 84 je platformou pre najpresnejšiu geometrickú reprezentáciu tvaru zemského telesa a presné určovanie polohy pomocou globálnych navigačných satelitných systémov (GNSS).

Názov elipsoidu	Rok	Hlavná polos (a) vyjadrená v metroch	Vedľajšia polos (b) vyjadrená v metroch	Sploštenie (i)	Územie
Besselov	1841	6 377 397,2	6 356 079,0	1/299,15	Stredná Európa
Hayfordov	1909	6 378 388	6 356 912	1/297	Severná Amerika
Krasovského	1940	6 378 245	6 356 863	1/298,3	ZSSR a bývalý východný blok (Východná a Stredná Európa)
WGS 84	1984	6 378 137	6 356 752,3	1/298,25	celý svet

Tab 2.2 Parametre vybraných referenčných elipsoidov.

Nakoľko má zemský elipsoid malé sploštenie, v určitých prípadoch sa môže nahradiť *referenčnou guľou*. Pri náhrade referenčných elipsoidov referenčnou guľou dochádza k podstatnému zjednodušeniu výpočtov, preto sa využívajú pre niektoré typy úloh, ako aj časti územia.

Referenčnú guľu ako referenčnú plochu používame hlavne v niekoľkých prípadoch:

- ak ide o územie, ktorého tvar má polomer približne 200 km. Spravidla ide o územia, kde sa neprejavuje dĺžkové a plošné skreslenie,
- v prípade kartografických úloh, ktoré nekladú vysoké nároky na presnosť (napríklad mapy malých mierok 1:1 000 000). V prípade takýchto úloh je možné referenčnú guľu určiť na základe viacerých kritérií, napr. objem gule je rovnaký ako objem elipsoidu; povrch gule je rovnaký ako povrch elipsoidu; polomer gule je aritmetickým priemerom veľkosti polosí; rovnaké dĺžky poludníkového kvadrantu a pod.

Referenčná guľa bola použitá taktiež aj pre bývalé Československo pri Křovákovom zobrazení, ktoré sa používa pre civilné účely, napr. pre kataster nehnuteľností, topografické (základné) mapy a mnohé ďalšie.

Referenčná rovina sa používa na zobrazenie územia s malým plošným rozsahom (max. do 700 km²), kde zakrivenie Zeme je zanedbateľné.

Poloha objektov nachádzajúcich sa na zemskom povrchu sa vyjadruje na základe kartografických zobrazení, ktoré sa v GIS označujú ako mapové projekcie. Jednotlivé mapové projekcie (kartografické zobrazenia) sa od seba odlišujú spôsobom premietania objektov. Existuje niekoľko typov kartografických zobrazení, ktoré sa klasifikujú na základe rôznych kritérií. Napr. podľa druhu zobrazovacej plochy na pravé (azimutálne, cylindrické, kónické), nepravé a neklasifikované (napr. polykónické, polyedrické); podľa polohy osi zobrazovacej plochy na normálne, transversálne, šikmé; podľa polohy stredu premietania na perspektívne (gnomické, stereografické, externé, ortografické) a neperspektívne (obraz vzniká na základe definovaných podmienok, ktoré sú určené matematickými vzťahmi); podľa umiestnenia zobrazovacej plochy voči referenčnej ploche na dotykové, sečné, odľahlé; podľa vlastností skreslenia na konformné, ekvidištantné, ekvivalentné, vyrovnávacie (Vajsábová et al., 2013).

Pre mapové projekcie sú následne definované súradnicové systémy. Ide o číselné hodnoty (vyjadrené v určitých jednotkách napr. v stupňoch, metroch), na základe ktorých je určená poloha objektov. Pri definovaní súradnicového systému je potrebné okrem samotného zobrazenia definovať aj vlastnosti

súradnicového systému (počiatočné body, orientáciu súradnicových osí.). Číselné vyjadrenie polohy objektov v GIS-e sa vyjadruje prostredníctvom súradníc (*coordinates*). Hlásny (2007) klasifikoval súradnicové systémy podľa špecifikácií Open GIS nasledovne:

- 2-D elipsoidický systém – jeden z najbežnejšie využívaných typov systémov, založený na koncepte elipsoidu (väčšinou geocentrického). 2-D vyjadruje skutočnosť, že slúži predovšetkým na určovanie horizontálnej polohy. Príkladom môže byť geografický súradnicový systém vyjadrujúci polohu bodov prostredníctvom geografickej šírky a dĺžky.
- 3-D karteziánsky systém – pre ktorý sú všetky polohy určované v rámci osí x, y a z. Ak začiatok súradnicového systému je zároveň stredom referenčného elipsoidu alebo referenčnej guli (bod 0;0;0), ide o geocentrický súradnicový systém. Poznáme aj topocentrický karteziánsky súradnicový systém, ktorý má svoj stred umiestnený na definovanom bode nachádzajúcom sa na povrchu uvažovaného referenčného telesa.
- Polárny (sférický) systém – kde stred súradnicového systému je umiestnený geocentricky alebo topocentricky, ale polohy sú vyjadrené formou polárnych súradníc (pomocou osí a sústredných kružníc). Polárne systémy sa používajú najmä pre azimutálne a kónické zobrazovacie plochy, kde začiatok súradnicového systému je umiestnený napr. do vrcholu kužeľa.
- Projekčný systém – ktorý je vyjadrený rovinnými (kartografickými) súradnicami. Je to typ karteziánskeho systému, v ktorom je začiatok súradnicového systému umiestnený topocentricky v uvažovanom bode (spravidla po rozvinutí zobrazovacej plochy do roviny) a je uvažovaná len horizontálna poloha. Poloha bodov sa potom vyjadruje napr. pomocou súradníc x a y a je vyjadrená v určitých jednotkách (napr. v metroch). Príkladom môže byť súradnicový systém S-JTSK.

Vertikálny (výškový) systém by sme mohli zdefinovať ako jednorozmerný systém skalárnych hodnôt výšok. Pre určovanie výšok je dôležité stanovenie nulovej referenčnej plochy. Rozoznávame niekoľko druhov výšok:

- *pravé ortometrické výšky* – pre ktoré je vzťažnou plochou hladinová plocha geoidu, ktorá prechádza nulovým výškovým bodom. Pravú ortometrickú výšku definuje dĺžka ťažnice medzi bodom na zemskom povrchu a geoidom.
- *normálne ortometrické výšky* - ktoré sa merajú od hladinového (normálneho) elipsoidu. Normálne ortometrické výšky sa používali napr. v Rakúsko-Uhorsku od roku 1873, neskôr aj v Československu do roku 1957 vo výškovom systéme ČSJNS – J (Jadran). Nulovým výškovým bodom bola stredná hladina Jadranského mora meraná na značke Molo Sartorio pri meste Terst v Taliansku.
- *normálne (Molodenského) výšky* - sú definované vzdialenosťou medzi bodom na zemskom povrchu a bodom na kvázigeoide. Vzdialenosť sa určuje v smere siločiar normálneho tiažového poľa Zeme. Príkladom je Baltský výškový systém po vyrovnaní (Bpv), ktorý sa používal v Československu a teraz aj na Slovensku od roku 1983. V Bpv sa stredná hodnota morského vodočtu (nulový výškový bod) vzťahuje na hladinu Baltské mora pri Ruskom meste Kronštadt (na ostrove Kotlin, pri Sankt Peterburgu), ktoré sú korigované súborom normálnych výšok z medzinárodného vyrovnania nivelačných sietí.
- *elipsoidické výšky (geodetické)* - sú definované ako vzdialenosti medzi referenčným elipsoidom a bodom na zemskom povrchu v smere normály ku elipsoidu. V súčasnosti sa používajú pre vyjadrenie výšky použitím referenčného elipsoidu WGS84, čo súvisí najmä s určením polohy pomocou globálnych navigačných satelitných systémov.

Pre vyjadrenie nadmorských výšok v národných projekciách sa používajú v rôznych krajinách rôzne výškové systémy (nulové výškové body) odvodené od dlhodobých meraní výšok rôznych hladín morí (Jadranské, Baltské, Severné a pod.).

2.3.1 Súradnicové systémy používané na Slovensku

Zvyčajne každý štát má aspoň jeden geodetický súradnicový systém, pričom sa v priebehu času môže zmeniť. Pre územie Slovenska sa používa viacero súradnicových systémov a kartografických zobrazení. V každom štáte sa vyberá také kartografické zobrazenie a súradnicový systém, ktoré najlepšie vyhovuje jeho praktickým podmienkam a potrebám. Jedným z najpoužívanejších kartografických zobrazení na Slovensku je Křovákovo zobrazenie, ktoré navrhol v roku 1922 Ing. Josef Křovák pre územie Československa. Křovákovo zobrazenie je dvojité konformné kónické zobrazenie vo všeobecnej polohe, pomocou ktorého sa body polohového bodového poľa zobrazia do roviny s príslušným pravouhlým súradnicovým systémom. V Křovákovom zobrazení sa Besselov elipsoid konformne zobrazí na zmenšenú tzv. Gaussovu guľu, ktorá sa dotýka elipsoidu v jednom bode základnej rovnobežky ($\varphi_0 = 49^\circ 30'$). Následne sa Gaussova guľa konformne zobrazí na šikmo položenú kužeľovú plochu. Kužeľ bol navrhnutý tak, aby pretínal plášť gule v dvoch rovnobežných čiarach. Plášť kužeľa sa potom dotýka zmenšenej Gaussovej gule (polomere $r' = 0,9999 r$, kde $r = 6\,380\,703,6105$ m). Umiestnením kužeľa do takto navrhnutej polohy a zmenšením polomeru gule sa dosiahli nižšie hodnoty plošného a dĺžkového skreslenia (od $-0,10$ m do $+0,14$ m na jeden kilometer dĺžky). Pre geodetické výpočty, určovanie bodov a pre meranie v teréne bolo následne nevyhnutné vybudovať sústavu jednoznačne navzájom určených a orientovaných bodov v spoločnom súradnicovom systéme. Tento systém sa nazýva Systém jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (S-JTSK). Body S-JTSK tvoria stabilizované polohové bodové pole so stanovenou presnosťou. Ich súradnice sa určili na základe výpočtov zohľadňujúc zakrivený tvar Zeme a kartografické zobrazenie. Je potrebné mať na pamäti, že S-JTSK bol vybudovaný v prvej polovici 20. stor., kde rozmer sietí bol odvodzovaný z dĺžok geodetických základní, ktoré boli merané invarovanými drôtmí. Výsledkom pomerne rýchleho vybudovania siete a limitov v presnosti merania a určovania polohy boli isté nedostatky (napr. orientácia siete, dĺžkové odchýlky, nižšia presnosť prevzatých astronomických súradníc a azimutov z iných sietí, a pod.). Prvé problémy začali vznikať s nástupom presnejších zariadení umožňujúcimi meranie dĺžky svetelnými diaľkomermi. Tieto problémy sa rozšírili pri konfrontácii presných družicových meraní s S-JTSK. Pre zachovanie homogenity bodového poľa S-JTSK bolo nutné deformovať presné dĺžkové a družicové meranie. Prvá verzia korigovanej S-JTSK bola vypracovaná na základe siete S-42/83, ktorá v tej dobe mala kvalitnejšie základné polohové body v Československu. Následne došlo k viacerým korekciám S-JTSK použitím družicových systémov. Keďže v tomto zobrazení os x smeruje na juh a os y na západ, v GIS-e sa zvyčajne používa toto zobrazenie so zápornými a vymenenými osami súradníc x a y . (Vajsáblová et al. 2013)

Na Slovensku sa najmä vo vojenských mapách v minulosti využívalo *Gaussovo-Krügerovo zobrazenie*. Základom pre tento projekčný systém je Krasovského elipsoid a valec v transverzálnej polohe s dotykovou osou pozdĺž stredného (základného) poludníka. Základný poludník je bez dĺžkového skreslenia, pričom ostatné poludníky sa zobrazujú po rozvinutí valca do roviny ako symetrické krivky voči základnému poludníku a ich dĺžkové skreslenie sa zväčšuje so vzdialenosťou od základného poludníka. Pri Gaussovo-Krügerovom zobrazení sú zvolené 3° až 6° pásy územia. Pre zobrazenie celého elipsoidu pri 6° pásoch je potrebných 60 polôh valca. Územia Slovenska sa dotýkajú pásy so základným poludníkom 15° a 21° reprezentuje 33. a 34. poludníkový pás. V rokoch 1955 až 1970 sa používali 3° poludníkové pásy pre potreby technicko-hospodárskeho mapovania. Pre každý poludníkový pás je definovaný vlastný súradnicový systém, kde os X tvorí obraz základného poludníka a os Y obraz rovníka. Takto definované súradnice sa používajú len na prepočet súradníc medzi jednotlivými pásmi a na určenie rohov mapových listov. V ostatných prípadoch sa používajú upravené súradnice, pričom zmena súradníc pre os Y je vyjadrená vzťahom

$$Y = K + y$$

kde konštanta $K = 500 \text{ km} + (n \cdot 10^3)$, n vyjadruje číslo poludníkového pásu a y je počiatočný bod základného poludníka. Súradnice osi X sa nemenia. Týmto posunom začiatku súradnicového systému bolo docielené to, že všetky súradnice nad rovníkom majú kladné hodnoty. S využívaním tejto projekcie pre viaceré geodetické a kartografické úlohy úzko súviselo aj budovanie základnej astronomicko-geodetickej siete v roku 1931. Do roku 1938 bola budovaná spolu s S-JTSK. V tejto súvislosti bolo vykonaných mnoho astronomických aj geodetických uhlových meraní, čím vznikla sieť bodov. Tá sa v roku 1955 vyrovnala spolu so sieťami susedných štátov (ktoré patrili do východného bloku a bývalej Rady vzájomnej a hospodárskej pomoci -RVHP). Zároveň sa napojila aj na sieť

bývalého ZSSR, ktorá bola vyrovnaná v roku 1942 odvodenú na Krasovského elipsoide s referenčným bodom v Pulkove. Od nej sa odvodzuje názov Súradnicový systém 1942 (S-42).

V súvislosti s rozdelením bývalého Československa a vstupom samostatnej Slovenskej republiky do Európskej Únie bola potreba definovania nového kartografického zobrazenia, ktoré by najlepšie vyhovovalo potrebám Slovenskej republiky, ako aj súčasným technológiám GNSS. Vajsáblková (2014) navrhla pre územia Slovenska *Lambertovo konformné kužeľové zobrazenie* s dvomi neskreslenými rovnobežkami v normálnej polohe. Maximálne dĺžkové skreslenie dosahuje $\pm 6,7$ cm/km. Predpokladá sa, že toto zobrazenie (prípadne jeho modifikácia) by mohlo nahradiť doterajšie, aj v základnom digitálnom štátnom mapovom diele.

V súvislosti s hospodárskou integráciou štátov Európy je v súčasnosti používaný *Európsky referenčný systém ETRS 89*. Systém je budovaný ako geocentrický, rovníkový, terestrický s konvenciou Greenwichskej orientácie. ETRS 89 je definovaný 36 európskymi ITRS (International Terrestrial Reference System) stanicami. Počiatok systému je v ťažisku Zeme (vrátane hmoty zeme, oceánov a atmosféry). V roku 1991 bolo rozhodnuté, že sa nahrádza pôvodný elipsoid WGS 89 elipsoidom GRS 80. Pôvodný elipsoid zaručoval presnosť v polohe 1-2 m. Pre praktické úlohy (v kartografii, GIS navigácii, a pod.) elipsoid GRS 80 môžeme pokladať za totožný s elipsoidom WGS 84. ETRS je navrhnutý ako referenčný systém pre Európu, ktorý rotuje a pohybuje sa ako Euroázijská geodynamická tektonická platňa, ktorá vykazuje pohyb asi 25 mm/rok. Týmto spôsobom sa eliminuje globálny tektonický pohyb. V pohybových tektonických bodoch ostávajú iba lokálne pohyby milimetrového rozsahu. Body rotujú so stabilnou časťou Európy.

Pre globálne dáta pokrývajúce celú Zem sa pomerne často používa *geografický súradnicový systém* (s geografickými súradnicami φ, λ), ktorý jednoznačne určuje polohu každého bodu na Zemi. Tento systém obsahuje sústavu čiar – poludníkov (meridiánov) a rovnobežiek (paralel). Hodnoty zemepisnej šírky a dĺžky sú vyjadrené buď v decimálnej sústave (napr. $19,255^\circ$) alebo v šesťdesiatkovej sústave (napr. $19^\circ 15' 30''$). Ďalšie často používané súradnicové systémy sú *Universal Transverse Mercator* (UTM), čo je konformné, valcové Mercatorovo zobrazenie, ktoré rozdeľuje glóbus na 60 poludníkových zón so šírkou 6° . Každá zóna sa ďalej člení na osemstupňové šírkové pásy. UTM sa používa s rôznymi elipsoidmi podľa potrieb jednotlivých krajín. V mnohých krajinách sa používa Mercatorovo valcové zobrazenie v priečnej polohe označovanej ako *Transverse Mercator*, ktoré sa v GIS-och používa aj pri definícii nášho súradnicového systému S-42. Rozdiel medzi UTM a Transverse Mercator je v tom, že v UTM sa centrálny meridián škáluje faktorom 0,9996.

2.3.2 Transformácie súradnicových systémov

Pri práci s geografickými dátami z rôznych zdrojov sa používateľ GIS často stretáva s problémom, že dáta sú dostupné v rôznych súradnicových systémoch. V prípade, že tieto dáta sa majú navzájom kombinovať, porovnávať, resp. používať v ďalších analýzach, tak je potrebné ich zobrazovať v jednom súradnicovom systéme. Z tohto dôvodu je potrebné si stanoviť jednotný súradnicový systém a transformovať dáta z iných súradnicových systémov do zvoleného súradnicového systému. Táto operácia sa dá vykonať dvoma spôsobmi. V prípade, že oba súradnicové systémy sú v GIS explicitne definované, je možné vykonať analytickú transformáciu karteziánskych súradníc $x_1; y_1$ pomocou zemepisných súradníc φ a λ na príslušnom elipsoide do cieľového súradnicového systému so súradnicami $x_2; y_2$ (Neteler a Mitasova, 2004):

$$x_1; y_1 \rightarrow \varphi, \lambda \rightarrow x_2; y_2$$

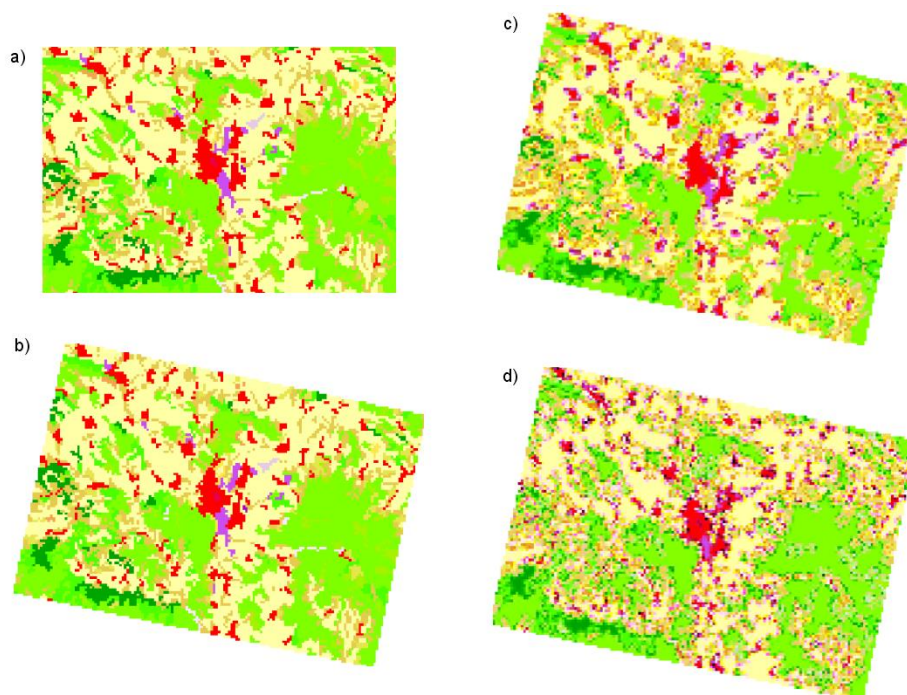
V prípade rozdielnych elipsoidov (referenčných telies) k tomu pristupuje navyše aj transformácia zemepisných súradníc $\varphi_1; \lambda_1 \rightarrow \varphi_2; \lambda_2$:

$$x_1; y_1 \rightarrow \varphi_1; \lambda_1 \rightarrow \varphi_2; \lambda_2 \rightarrow x_2; y_2$$

Priama transformácia súradníc medzi rovinnými pravouhlými súradnicovými systémami sa vykonáva pomocou numerických transformácií. Numerické transformácie nevyžadujú znalosť zobrazovacích rovníc dotknutých súradnicových systémov, ale sú založené na poznaní presnej polohy určitého počtu vybraných, tzv. referenčných bodov v oboch súradnicových systémoch. Najčastejšie sa používa lineárna transformácia a polynommická transformácia. Lineárna transformácia (nazývaná tiež Helmertova) je vhodná pre transformáciu vzájomne posunutých a pootočených súradnicových

systémov. Transformácia sa vykonáva pomocou transformačných rovníc, ktorých koeficienty sa odvodzujú z dvojíc referenčných bodov. Polynomická transformácia môže byť n -tého rádu, avšak zvyčajne sa používa transformácia 1. rádu (afinná). Polynomicke transformácie 2. a 3. rádu sa používajú len zriedka, a to najmä v prípade, že deformácie dát spôsobené transformáciou majú komplikovanejší charakter. V prípade afinnej transformácie je minimálny počet dvojíc referenčných bodov 3, ale odporúča sa použiť vyšší počet bodov, ktoré zmenšia polohovú chybu transformácie. Pri výbere bodov je potrebné vyberať objekty dobre identifikovateľné na oboch mapách, resp. dátových zdrojoch tak, aby optimálne pokryli celé územie. Pri polynomických transformáciách je potrebné mať nielen vyšší počet referenčných bodov, ale aj ich umiestnenie musí pokryť aj okrajové časti územia. Pri veľkých územiach môže dôjsť k veľkým polohovým deformáciám, a preto je potrebné výsledky numerickej transformácie vždy dôkladne skontrolovať. (Hofierka 2003)

Pri transformácii rastrov dochádza ku problémom vzťahujúcich sa na geometrický aspekt transformácie polohy bunky, ako aj problém stanovenia hodnoty (atribútu) v bunke pre transformovaný dátový súbor. Tento problém sa objavuje aj pri zmene rozlíšenia rastra. Existuje viacero metód výpočtu hodnoty v transformovanej bunke. Najčastejšie sa používa metóda najbližšieho suseda, bilineárna interpolácia a kubická konvolúcia (Tuček, 1998). Na obr. 2.9 je uvedený príklad transformácie rastra s kvalitatívnymi dátami (kategóriami) z Lambertovho azimutálneho ekvivalentného zobrazenia do Křovákovho zobrazenia.



Obr. 2.9 Porovnanie transformácie a) pôvodného rastra pomocou b) metódy najbližšieho suseda, c) bilineárnou interpoláciou a d) kubickou konvolúciou.

Výber vhodnej metódy závisí najmä od povahy a účelu spracovávaných dát. Metóda najbližšieho suseda sa používa najmä pre kvalitatívne dáta (kategórie). Nemenia sa pri nej výstupné hodnoty, len sa môžu posunúť. Polohový posun by nemal prekročiť $\frac{1}{2}$ veľkosti bunky rastra. Výstupnej bunke sa priradí atribútová hodnota bunky v pôvodnom rastri, ktorej stred je najbližšie. Pri bilineárnej interpolácii sa identifikujú štyri bunky pôvodného rastra, ktoré sú najbližšie k stredu novej bunky a priradí sa jej hodnota, ktorá je váženým priemerom ich hodnôt podľa ich vzdialenosti. Táto metóda je vhodná najmä pre spojité hodnoty (napr. povrchy). Určitou nevýhodou metódy je vyhladzovanie hrán a extrémnych hodnôt. Kubická konvolúcia je analogická bilineárnej interpolácii, ale priradenou hodnotou je vážený priemer podľa vzdialenosti zo 16 najbližších hodnôt pôvodného rastra. Na obr. 2.9c a 2.9d je vidieť, že metódy bilineárnej interpolácie a kubickej konvolúcie nie sú vhodné pre transformáciu kvalitatívnych

dát. Opačná situácia by nastala pri použití spojitých dát, alebo satelitných dát. Pri výbere metódy treba preto zvážiť charakter transformovaných dát, prípadne vzájomne porovnať výsledky. (Hofierka et al. 2014)

3 PRIESTOROVÉ GEODATABÁZY, VÝBERY Z GEOGRAFICKÝCH DATABÁZ

Jedným z najstarších analytických nástrojov, ktoré sa používajú pri práci z priestorovými informáciami, je výber z geografických databáz. Obrovské množstvo dát, ktoré sa každodenne vytvára, alebo ktoré vzniklo v minulosti je nutné systematicky spracovávať. Pre tieto potreby sa využívajú určité systémy správy dát, ktoré majú viacero pomenovaní, napr. databáza, báza údajov, báza dát, dátová báza, niekedy aj databanka, ktoré viac menej znamenajú to isté. Vznik pojmu databáza súvisí s využívaním výpočtovej techniky a nástupom počítačov. V ich začiatkoch bolo potrebné zo strany administrátora zabezpečenie viacerých úloh, napr. administrácia a obsluha externého pamäťového úložiska. Automatizácia procesov bola na veľmi nízkej úrovni. Krajčí (2005) uvádza, že zásadný progres v tejto oblasti priniesli operačné systémy (OS) so systémami súborov (*file system* - príklad FAT16, NTFS, neskôr FAT32). Prvé operačné systémy boli nastavené tak, aby ich využíval iba jeden používateľ. Dáta boli ukladané na pomalé externé pamäte, napr. pásky. V neskoršom období už priniesli OS možnosť práce viacerých používateľov a výrazný pokrok sa zaznamenal v súvislosti s hardvérom na ukladanie dát, ktoré obsahovali špecializované funkcie umožňujúce definovanie prístupu k dátovým súborom na úrovni záznamov (*record*), ich triedenie, tvorbu indexových súborov a pod. V tejto fáze už môžeme začať hovoriť o databázových systémoch. V druhej polovici 60-tych rokov spoločnosť IBM vyvinula systém IMS (Information Management System), ktorý súvisel s projektom Apollo, kde bolo potrebné organizovať výrobu súčiastok hierarchickým spôsobom. Začal sa tiež používať názov DBMS (database management system). Ich výhodou oproti systému súborov bolo, že dokázali vykonávať konkurentnú (viac procesovú) prácu na úrovni záznamov, pri práci s dátami fungoval transakčný mechanizmus, boli vyvinuté prostriedky na zálohovanie a autorizáciu. Komerčné DBMS sa na trhu objavili až v 80. rokoch. Medzi najvýznamnejšie patrili Oracle, DB2, Informix, Ingres, Progress a iné. Najväčším problémom však bolo to, že jednotlivé typy systémov nižšej a vyššej generácie nemali vypracovaný štandard. Po štandardizácii jazyka SQL sa databázy rýchlo rozšírili a našli si uplatnenie vo viacerých aplikáciách. (Krajčí, 2005).

Pojem databáza má v súčasnosti aj širší význam a môže sa ním označovať aj kartotéka, alebo neelektronická databáza. Zbierky dát, ktoré sa podobajú na databázu existovali už od nepamäti a mali charakter informácií vo forme účtovníckych záznamov a kníh, až v neskoršom období sa objavili tzv. kartotéky. V zmysle práce Hofierka et al. (2014) **databázu** chápeme ako organizovanú množinu účelovo zhromaždených dát uloženú v počítačovom systéme, pomocou ktorého vieme získavať informácie. Používanie databáz má viaceré výhody, napr. spoľahlivé ukladanie údajov, organizácia a štruktúra databázy, neustála dostupnosť, prehľad v aktualizáciách dát, selektívne poskytovanie informácií z databázy a pod. Z týmito vlastnosťami databázy úzko súvisí aj požiadavka na viaceré úlohy, ktoré riadi databázový systém a databázový správca. Ide napríklad o zabezpečenie funkčnosti, bezpečnosti, organizácie a štruktúry dát a pod. Jednou z hlavných úloh, ktoré musí zabezpečiť databázový systém (t.j. systém riadenia bázy dát), je vykonávanie zmien v databáze súčasne viacerými používateľmi. Prístup k databáze musí vylúčiť konflikty a poškodenia databázy v prípade, že viacerí používatelia chcú naraz meniť obsah databázy. Skupina zmien v databáze (napr. pridanie plochy, línie, atribútu a podobne) sa vykonáva v tzv. transakciách. Počas transakcie nie je možné meniť tie isté dáta a ďalšia transakcia čaká na dokončenie predošlej. Keďže čas vykonania transakcie je veľmi krátky, väčšina používateľov zdržanie ani nezaznamená. Okrem toho sa v databáze uchovávajú zmeny v databáze formou tzv. verzií databázy. Z tohto dôvodu firmy, organizácie ale aj štáty majú veľkú potrebu využívania spoľahlivých informačných systémov, ktorých súčasťou sú aj komplexné databázy. Databázy sú používané v každodennom živote a majú výrazný dopad na rozhodovacie procesy. Čím je databáza rozsiahlejšia a má viac používateľov, tým náročnejšie je jej administrovanie.

Doposiaľ sme sa venovali predovšetkým vnímaniu databáz vo všeobecnosti. Existuje však viacero dôvodov, prečo je užitočné využívať aj pri práci s geografickými dátami geodatabázy. Keď je dát nie je až tak veľa, tak používateľ vie, aké dáta má k dispozícii, kde sú v počítači uložené, kedy boli

aktualizované a pod. Problém však nastáva, keď je dát veľa, keď je viacero používateľov dát, viacero lokalít, časové rady a pod. Dobrým príkladom je firma, kde viacero ľudí pracuje na viacerých zákazkách. Pre chod firmy je jednou z kľúčových vecí zabezpečiť, aby dáta boli uložené bezpečne, aby boli dobré štruktúrované, rýchlo nájateľné, aby k nim mali prístup iba tí, ktorí s nimi majú oprávnenie pracovať, aby bolo možné realizovať dopyty, aby s rovnakými dátami mohli pracovať viacerí používatelia v tom istom čase a pod. V takýchto prípadoch je potrebné mať dáta v geodatabáze.

Geodatabáza (geopriestorová databáza) je databáza obsahujúca geopriestorové dáta z daného územia a na určitý účel. Môžu to byť napríklad záznamy meraní z meteorologických staníc na území Slovenska. Poloha každej stanice je určená súradnicami a tento objekt má priradenú množinu meteorologických premenných zaznamenaných v určitom časovom období. Geodatabáza je zvyčajne jednou z najdôležitejších častí GIS-u. Jednak tu ide o vysoké náklady vynaložené na naplnenie databázy dátami, ale takisto databáza je základ pre tvorbu analýz, modelovanie a tvorbu výstupov. Organizovaná databáza má značné výhody pri využívaní množstva dát, a to najmä ak má veľa používateľov. Rozsahom dát malé, jednoduché databázy využívané jedným alebo niekoľkými používateľmi, môžu byť tvorené len jednoduchým súborovým systémom, kde GIS dáta (mapy) sú uložené ako súbory v špeciálnom adresári, pričom sú často určitým spôsobom štruktúrované (napr. rastrové, vektorové dáta, metadáta a podobne). Komplikovanejšie databázy s veľkým počtom používateľov vyžadujú systém riadenia databázy (DBMS). DBMS zabezpečuje viacero dôležitých funkcií, ktoré uľahčujú prácu s veľkým množstvom dát:

- poskytuje vhodné dátové modely pre popis objektov uložených v databáze,
- zabezpečuje vstup (konverziu) dát vkladaných do databázy,
- realizuje indexáciu položiek (dátovú štruktúru potrebnú na rýchle prehľadávanie),
- poskytuje dopytovací databázový jazyk,
- poskytuje zabezpečenie dát (prístupové práva),
- vykonáva riadenú aktualizáciu, zálohovanie a obnovu dát,
- poskytuje nástroje administrácie databázy,
- poskytuje aplikačné nástroje a programovateľné aplikačné rozhranie (API).

V GIS-och sa používajú nasledovné typy databáz: relačná, objektová, objektovo-relačná (Longley et al., 2011).

Pri projektovaní použitia geopriestorovej databázy musíme zvažovať viacero faktorov. V konceptuálnej rovine musíme zvážiť ciele použitia databázy, aké dáta, kto ich bude používať a na aký účel. To bude určovať triedy objektov, ich vzťahy a potrebné funkcie. Jednou z dôležitých úloh je aj určenie priestorovej reprezentácie používaných dát (vektor, raster), pretože každá konverzia znamená určitú stratu informácie. Dáta v databáze by mali byť určitým spôsobom štruktúrované. Existujú dva hlavné spôsoby štruktúrovania dát v geodatabáze: topológiou a indexovaním. Topológia sa vytvára pre vektorové dáta. Zvyčajne je to interaktívny proces, pretože vyžaduje aj manuálne úpravy. Indexovanie slúži na rýchlejšie dopytovanie databázy, najmä keď obsahuje veľmi veľa položiek. Namiesto prehľadávania jednotlivých položiek v databázovej tabuľke sa proces zrýchli použitím indexových položiek, ktoré ukazujú na skupiny položiek. V GIS-e sa najčastejšie využívajú metódy R-tree, quadtree a gridový index.

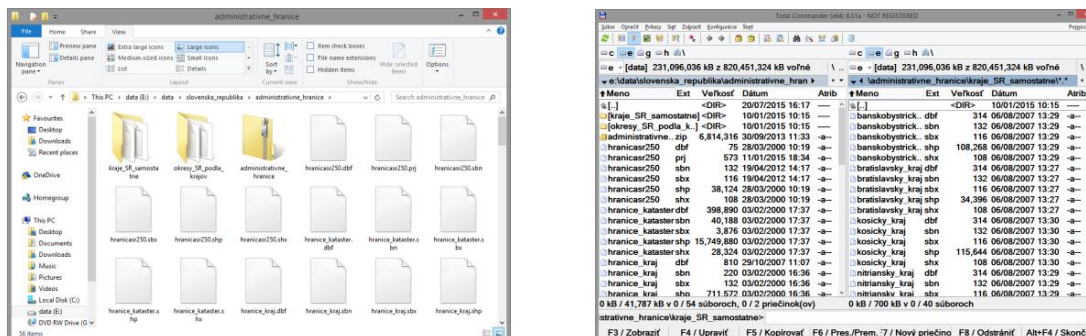
Spracovanie geografických objektov nepriestorovými databázami sa často zabezpečuje pomocou osobitnej nadstavby, prepojenia medzi databázou a GIS-om. Príkladom je MySQL, Oracle, alebo PostGIS pre PostgreSQL.

3.1 Typy geodatabáz

Databáza je postavená koncepčnom ukladaní záznamov alebo čiastkových informácií. Základom databázy je **logická schéma**, ktorú tvorí opis štruktúry dát, typu dát, vzťahy medzi dátami. Existuje viacero prístupov ku tvorba takýchto schém, ktoré by sme zároveň mohli zdefinovať ako **model databázovej štruktúry**, alebo ako **druhy databázových systémov**.

Systémy súborov

Jedným z najbežnejších používaných databázových štruktúr je tzv. **systémy súborov**, v ktorom všetky úlohy spojené so štruktúrou údajov, zabezpečením, prístupmi k jednotlivým súborom, triedenie, vyhľadávanie obsluhuje administrátor, resp. používateľ. Takýto spôsob organizácie dát je najrozšírenejší u bežných používateľov. Pre organizáciu údajov sú operačným systémom podporované rôzne aplikácie napr. v OS Windows je to aplikácia Tento počítač, alebo Total Commander, a mnoho ďalších. Veľkou nevýhodou takejto organizácie databázy je nemožnosť využívať dopytovací jazyk. (obr. 3.1)



Obr. 3.1 Ukážka usporiadania dát pomocou modelu databázovej štruktúry typu systém súborov A – v programe Tento počítač a B – Total Commander

Relačná databáza

Za naviac využívané profesionálne databázové systémy by sme mohli označiť **relačné databázy**. Táto štruktúra uchovávaní dát je dostatočne flexibilná a rozšírená. Približne 95% existujúcich dát je uchovávaných v relačných databázach. Príkladom relačných databáz a ich systémov riadenia bázy dát sú Microsoft Access, Microsoft SQL Server, Oracle Universal Server, Informix Dynamic Server, PostgreSQL, MySQL a iné. Relačné tabuľky je možné navzájom kombinovať (napr. spájať, aktualizovať obsah a podobne) pokiaľ položky v tabuľkách obsahujú totožný identifikátor.

Relačná databáza obsahuje dvojrozmerné tabuľky s atribútmi o objektoch. Každá geografická trieda (vrstva) objektov je uložená ako tabuľka. Riadky obsahujú objekty (napríklad body reprezentujúce pôdne sondy) a stĺpce vlastnosti alebo atribúty objektov (namerané vlastnosti pôdy v danom bode). (obr. 3.2) Tabuľky geografickej databázy obsahujú navyše aj dáta o polohe objektov buď priamo na základe súradníc, alebo pomocou odkazu na tieto súradnice uložené v binárnom formáte.

Navrhnutím relačných databázových systémov sa zjednodušila tvorba a využívanie aplikácií. Narábanie s databázou nadobudlo charakter práce s obyčajnými tabuľkami. Riadky tabuľky predstavujú záznamy jedného typu a stĺpce ich atribúty. Tabuľky medzi sebou odkazujú pomocou stĺpcov s rovnakými menami (vo všeobecnosti pomocou stĺpcov vyhovujúcich definovanej relácii). Relačné databázy majú navyše aj svoje teoretické zázemie v relačnej algebre. Na tabuľku sa dá pozeráť ako na podmnožinu karteziánskeho súčinu hodnôt atribútov, čo zodpovedá matematickému pojmu relácia. Nad reláciami sa môžu vykonávať tradičné množinové operácie: zjednotenie, prienik, projekcia, selekcia, karteziánsky súčin a pod. Relačné DBMS zachovávajú databázové charakteristiky predchádzajúcej generácie (perzistencia, správa externej pamäte, konkurentnosť, bezpečnosť, spoľahlivosť). Súčasťou databáz je štruktúrovaný dopytovací jazyk SQL (Structured Query Language), odbremeňujúci od poznania fyzického uloženia dát v sekundárnych pamätiach. Tento štruktúrovaný dopytovací jazyk bol štandardizovaný inštitúciami ISO aj ANSI. Z programátorského hľadiska priniesli tiež relačné DBMS softwarové prostriedky vyššej úrovne: na navrhovanie a obsluhovanie interaktívnych obrazoviek, tvorbu tlačových zostáv a pod. Relačné DBMS boli navrhnuté a ukázali sa ako veľmi vhodné pre "agendové" databázové aplikácie: bankové a poisťovacie systémy, účtovníctvo, skladové hospodárstvo, rezervačné systémy, agendy obyvateľstva a pod.

FID	Shape	FLAGNUM	X COORD	Y COORD	PH	EC	ORGANIC M	SOIL K	SOIL P	PL BIOMASS
0	Point	1	498364,844	5076876	5,8	0,0	3,52	310	37,9	88,06
1	Point	2	498420,313	5076878	6	0,0	2,33	222	27,2	84,82
2	Point	3	498458,813	5076883,5	5,7	0,0	2,9	288	35,6	139,04
3	Point	4	498311,25	5076819,5	6,3	0,0	3,14	286	28,7	110,67
4	Point	5	498365,625	5076820,5	6,2	0,0	3,44	388	44,7	90,65
5	Point	6	498422,375	5076822,5	6	0,0	2,85	238	30,2	95,18
6	Point	7	498468,469	5076830	5,9	0,0	4	386	64,8	99,91
7	Point	8	498319,813	5076764	6,1	0,0	3,66	326	51,6	68,98
8	Point	9	498372,719	5076765	5,8	0,0	3,8	324	48,8	89,35
9	Point	10	498425,406	5076765	5,8	0,0	3,47	302	52,2	84,92
10	Point	11	498479,688	5076771	7,1	0,2	2,09	222	24,7	80,29
11	Point	12	498273,969	5076707	6	0,0	2,65	274	51	79,34
12	Point	13	498321,844	5076709	5,9	0,0	3,21	260	35,9	97,39
13	Point	14	498375,531	5076709,5	6,1	0,0	3,55	286	37	93,79
14	Point	15	498428,031	5076711,5	6	0,0	3,24	294	36,8	120,76
15	Point	16	498482,094	5076712,5	6	0,0	2,31	210	27	98,79
16	Point	17	498277,156	5076650	5,9	0,0	3,79	392	62,1	131,15
17	Point	18	498323,438	5076652,5	5,9	0,0	3,93	352	51	102,04
18	Point	19	498377,888	5076654	6,5	0,0	2,77	238	25,4	99,61
19	Point	20	498429,5	5076655,5	8,2	0,1	1,69	174	23,3	79,47
20	Point	21	498486,719	5076670,5	6,4	0,0	2,43	302	55	109,7
21	Point	22	498275,281	5076587	5,8	0,0	4,84	490	63,8	103,7
22	Point	23	498325,875	5076592	6,5	0,0	2	184	27,7	99,01
23	Point	24	498380,938	5076596,5	5,8	0,0	3,58	392	52,9	124,59
24	Point	25	498434,344	5076601	6	0,0	4,32	466	55,2	87,71
25	Point	26	498488,563	5076606	6	0,0	3,37	314	27,2	87,95
26	Point	27	498278,281	5076535	5,9	0,0	3,26	278	32	88,5
27	Point	28	498327,813	5076538	6	0,0	3,21	242	33,8	87,23
28	Point	29	498382,969	5076541,5	5,9	0,0	4,92	662	71,6	122,25
29	Point	30	498435,406	5076546	6	0,0	4,83	564	57,2	175,52
30	Point	31	498487,719	5076549,5	7,1	0,0	1,08	166	28,1	59,15
31	Point	32	498276,875	5076477	6	0,0	4,18	522	59	128,31
32	Point	33	498332,438	5076484,5	7,6	0,1	2,57	320	69,3	102,79
33	Point	34	498384	5076488	6,4	0,0	3,93	410	35,6	72,12
34	Point	35	498439,063	5076491	6,3	0,0	3,55	270	32,1	110,76
35	Point	36	498487,813	5076492,5	6,2	0,0	4,04	324	32,4	98,77
36	Point	37	498276,531	5076427,5	7,8	0,1	3,41	230	64,7	110,37
37	Point	38	498332,188	5076430,5	5,8	0,0	4,29	388	48,9	80,36
38	Point	39	498385,844	5076433,5	6,5	0,0	4,47	248	34,6	86,94
39	Point	40	498440,531	5076435,5	6,3	0,0	2,82	236	26,1	92,11

Obr. 3.2 Relačná databázová tabuľka v ArcGIS-e

Objektová databáza

Niektoré nedostatky relačných databáz mali odstrániť objektové databázy. Napríklad relačné databázy nedokážu uchovávať kompletne objekty v databáze (teda aj stav a správanie sa objektu). Zvyčajne sú vhodnejšie najmä pre jednoduché typy objektov a dát. Objektové databázy uchovávajú samostatné objekty a poskytujú objektovo orientované dopytovacie nástroje na prácu s objektmi (prvkami) databázy. Podstatný rozdiel medzi relačným a objektovo orientovaným modelom je v tom, že každý objekt reálneho sveta je v objektovo orientovanej databáze reprezentovaný jedným databázovým objektom, zatiaľ čo v relačnej databáze je charakterizovaný viacerými záznamami popisujúcimi vlastnosti tohto objektu. Komerčne však tieto databázy nie sú príliš úspešné.

Objektovo-relačná databáza

Objektovo-relačné databázy by sme mohli charakterizovať ako hybridné, do relačných databáz boli postupne implementované aj objektovo orientované prvky, takže vznikli hybridné. Tie sa môžu chápať ako relačné databázy, ktoré môžu pracovať aj s objektmi. Objekt je teda popísaný jednak z hľadiska atribútového a jednak behaviorálneho (procesného, algoritmickeho). Relačné databázy charakterizuje relatívne jednoduchá štruktúra dát a jednoduché algoritmy (napriek potenciálne veľkému množstvu dát) a centralizovaná databáza - uložená obvykle na jednom výkonnom počítači s možnosťou pripojenia viacerých terminálov. Po úspechu databázových systémov v klasických oblastiach sa objavili požiadavky na ich uplatnenie aj v "nových" oblastiach aplikácie: navrhovanie artefaktov (navrhovanie strojárskych komponentov, elektronických obvodov veľmi vysokej integrácie ...), riadenie výroby (v strojárskom, chemickom a inom závode), spracovanie dokumentov (hypertexty, grafická dokumentácia, automatizácia kancelárskych prác ...), softwarové inžinierstvo (CASE systémy), vedecké databázy (medicína, organická chémia ...). Tieto aplikácie charakterizuje zložitá štruktúra dát a komplikované algoritmy a časté použitie siete výkonných počítačov (pracovných staníc) a distribuovaných databáz. Objektovo orientované DBMS (ďalej ODBMS) priniesli oproti relačným DBMS (RDBMS) bohatšie dátové aj procedurálne modelovanie. Medzi ich hlavné črty patrí spájanie

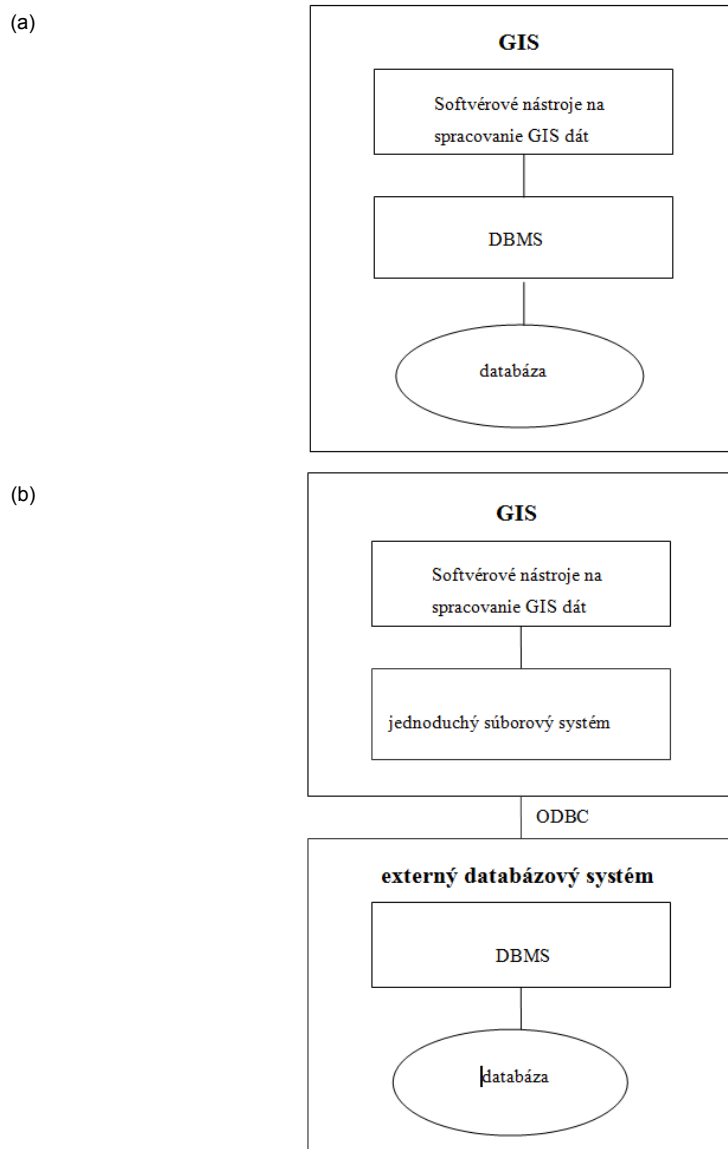
príbuzných dát, spájanie dát s funkciami a spájanie databázového a programovacieho jazyka. Spájanie príbuzných dát znamená, že ODBMS umožňujú prirodzenejšiu reprezentáciu zložitejších dátových štruktúr (pri grafickej dokumentácii sa napríklad využívajú vektory, pri riadiacich systémoch robotov matice a pod.). Dáta, ktoré navzájom súvisia v realite, sa spolu ("blízko seba") uchovávajú aj v externých pamätiach. Funkcionalita spájania dát s funkciami poskytuje tradičné objektovo - orientované charakteristiky ako napr. spájanie dát s funkciami, ukrývanie dát, používateľsky definovateľné typy, typové dedenie, polymorfizmus a pod.

3.2 Základné pojmy

S používaním databáz však súvisí aj využívanie špecifických pojmov, z ktorých vyberieme tie najdôležitejšie. V práci Krajčí (2005) sú podrobne vysvetlené viaceré pojmy s názornými príkladmi. Ako bolo naznačené, **databáza** je súhrn údajov vzťahujúcich sa k určitej téme alebo účelu (napr. údaje o zamestnancoch). Údaje sú štruktúrované, čo umožňuje oveľa jednoduchšie a bezpečnejšie operácie nad údajmi ako pri práci so samotnými údajmi v databáze. Databázy sú štruktúrované do **objektov**, ktoré sú spravidla tabuľky. Objekty však môžu byť aj rôzne súbory (napr. obrázky, vektorové údaje, zvukové záznamy a pod.). **Entita** predstavuje nejaký objekt, ktorý je jednoznačne odlišený od ostatných objektov. (napr. Janko Hraško s číslom občianskeho preukazu EF120963 – čiže Janko Hraško predstavuje entitu). **Vzťah** (relácia – *relationship*) predstavuje väzbu medzi dvoma alebo viacerými entitami. (Napr. Janko Hraško býva v Košiciach a študuje na UPJŠ. – reláciu reprezentuje „býva“ a „študuje“). Relácie sa používajú na vyjadrenie vzťahov medzi objektami. Sú to dvojrozmerné tabuľky, ktorých riadky tvoria prvky relácie. Stĺpce tvoria atribúty. Aspoň jeden zo stĺpcov je jednoznačný identifikačný kľúč (ID - identifikátor). Pre geografické dáta sa do relačných databázach zavádza priestorový typ dát, funkcií a indexov. **Atribút** (*attribute*) je funkcia, ktorá priradzuje entitám alebo vzťahom nejakú hodnotu určujúcu podstatnú dôležitú vlastnosť. (napr. Janko Hraško býva nerád v Košiciach a poctivo študuje na UPJŠ – atribút vyjadruje *nerád* a *poctivo*). **Doména** zase vyjadruje možné hodnoty atribútov (napr. číslo, reťazec znakov, dátum). **Identifikačný kľúč** je údaj, ktorým musí byť každá entita identifikovateľná niektorým z atribútov a odlišiteľná od iných entít (Napr. pre entitu Janko Hraško by bol vhodný identifikačný kľúč číslo občianskeho preukazu). V praxi sa často používa aj tzv. umelý kľúč, ktorý spravidla reprezentuje číslo. V terminológii GIS sa často krát objavujú aj iné pojmy. Používanie jednotnej terminológie je však veľmi dôležité, nakoľko iná terminológia môže pri práci s dátami spôsobovať isté problémy. Napríklad úlohu typu „zapíšte pre priestorové objekty vzťahujúce sa na okresy atribúty o počte obyvateľov“ by databázový analytik nemusel hneď pochopiť. Z pohľadu databázového analytika by správne znelo zadanie asi takto: „Zapíšte do databázového objektu tabuľky atribúty o počte obyvateľov pre všetky entity reprezentujúce okresy.“ Na druhej strane, nad týmto zadáním by zrejme musel GIS analytik trochu rozmýšľať, aby pochopil zadanie.

Najčastejšie sa v GIS-och pracuje s jednoduchým súborovým systémom bez systému riadenia databázy. Toto riešenie je jednoduché a úsporné, avšak neumožňuje pracovať komplexnejšie s viacerými zdrojmi dát naraz. Ďalším hendikepom je možnosť práce s dátami viacerými používateľmi naraz, čo má svoj význam pri prezeraní dát, ale najmä pri editácii dát. V súvislosti s nárastom informácií sa však čoraz častejšie využíva práca v určitej geodatabáze, v ktorej sú dáta štruktúrované. Takto fungujúce GIS-y však zvyčajne majú možnosť pracovať s externou databázou prostredníctvom prepojenia. Môže sa jednať o exportno-importné moduly alebo o riešenie pomocou ODBC (Open DataBase Connectivity). ODBC je softvérové rozhranie, ktoré umožňuje GIS-u pracovať s dátami z rôznych databáz.

Existujú GIS-y (napr. ArcGIS), ktoré majú svoj vlastný, priamo integrovaný relačný databázový systém. Navyše, mnohé z nich súčasne ponúkajú aj možnosť prepojenia na iné, externé databázy pomocou špeciálnych softvérových modulov. Porovnanie oboch prístupov je na obr. 3.3 Výber architektúry riešenia závisí od charakteru riešených úloh, počtu používateľov dát a finančných možností organizácie. Úlohou GIS-u je zabezpečiť vstup dát, ich editovanie a spracovanie, databázový systém zabezpečuje najmä ukladanie dát, indexovanie, efektívne dopytovanie, zálohovanie a zabezpečenie dát.



Obr. 3.3 a) databázový systém ako súčasť GIS-u, b) externé použitie databázového systému.
Zdroj: Hofierka et al. (2014)

3.3 Dopytovací jazyk

Databáza sa vytvára a manipuluje sa s ňou pomocou databázového jazyka. Na prácu s dátami v databáze sa používa dopytovací jazyk, ktorý sa používa na výber dát z databázy. Príkladom databázového dopytovacieho jazyka sú SQL, QBE, DATALOG a podobne. Najčastejšie sa používa jazyk SQL (Standard Query Language). Možnosti jazyka SQL boli nedávno rozšírené aj o priestorové typy a funkcie špecificky potrebné pre GIS (Longley et al, 2011).

Jazyk SQL vyvinula firma IBM v 70-tych rokoch 20. storočia. Postupne sa stal štandardom v relačných databázach. Používa sa v komunikácii s databázou priamo v interaktívnom režime alebo prostredníctvom aplikačného softvéru, často s príjemnejším a komfortnejším používateľským rozhraním.

Základným príkazom jazyka SQL je príkaz SELECT (výber), ktorým sa vyberajú výstupné polia (stĺpce). Príkaz SELECT sa zvyčajne rozširuje o ďalšie príkazy, tzv. klauzuly. Výsledkom použitia tohto príkazu je nová relácia. Štandardný tvar (syntax) použitia príkazu SELECT:

SELECT pole FROM tabuľka

Pomocou klauzuly WHERE je možné podmieňovať výber na základe podmienky (kritéria):

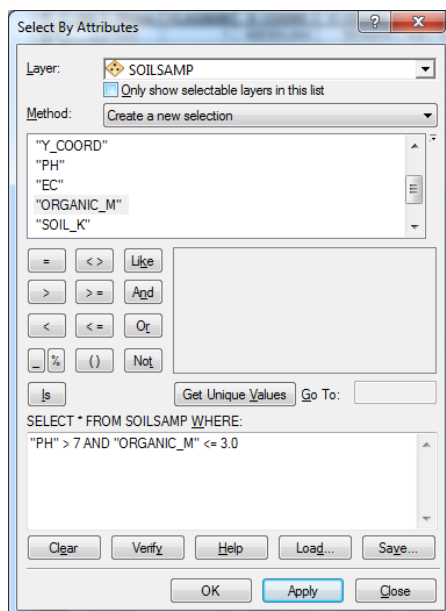
SELECT pole FROM tabuľka WHERE podmienka

Okrem toho je možné použiť aj štandardné logické a aritmetické operátory (napr. AND, OR, XOR, >, <, = a iné). Okrem toho jazyk SQL obsahuje aj ďalšie klauzuly, napr. JOIN, GROUP BY, BETWEEN, LIKE a podobne.

Príklad atribútového výberu z databázy pôdných sond:

SELECT * FROM soilsamp WHERE ph > 7 AND organic_m <= 3.0;

(vybrať všetky „*“ záznamy z tabuľky „soilsamp“, kde atribút „ph“ je väčší ako „7“ a zároveň atribút „organic_m“ je menší alebo rovný „3.0“). V ArcGIS-e sa atribútový výber vykonáva prostredníctvom SQL dopytu v grafickom okne, teda pomocou QBE (Query By Example) (obr. 5.2).



Obr. 5.2: Atribútový výber pomocou SQL príkazu v ArcGIS-e.

Jazyk SQL bol rozšírený aj o priestorové príkazy a funkcie:

- equals – porovnanie zhodnosti geometrických prvkov a výber prvkov, ktoré podmienku spĺňajú,
- disjoint – priestorové prvky nemajú spoločný bod,
- intersects - prienik priestorových prvkov,
- touches - priestorové prvky sa dotýkajú,
- within - priestorový prvok je v rámci iného prvkov,
- contains - jeden priestorový prvok obsahuje druhý prvok,
- overlaps - priestorové prvky sa prekrývajú,
- relate - priestorové prvky sa prekrývajú svojím vnútrom, hranicou alebo okolím.

Ďalšie funkcie umožňujú realizovať priestorové analýzy prvkov, napríklad určovať vzdialenosti medzi prvkami, vytvárať zóny okolo prvkov, vytvárať ich prieniky alebo ich zjednocovať a podobne. Tieto

funkcie môžeme tiež rozdeliť na operátory, ktoré sú zamerané na dĺžky, plochy, obvody, na operátory zamerané na topologické vzťahy (prienik, dotýka sa a podobne) alebo aj ich kombináciu. Mnohé z týchto operácií sa týkajú len vektorových dát (napr. operácia dotýka sa), pretože topologické vzťahy sú explicitne vyjadriteľné len vo vektorovom formáte. V prípade rastrov je často nutná interakcia používateľa – napr. označenie bodu alebo línie, voči ktorej sa má vykonať nejaká operácia.

4 MATEMATICKÉ ZÁKLADY PRE PRIESTOROVÉ ANALÝZY A INTERPOLÁCIU

Hlavný cieľom tejto kapitoly je objasniť základné matematické princípy, ktoré sa často používajú pri priestorových analýzach a priestorovej interpolácii. Táto kapitola bola zaradená aj z dôvodu, že predmet Priestorové analýzy a modelovanie si môžu zapísať aj študenti, ktorí neabsolvovali predmet Matematika pre geografov, resp. Matematická analýza. Veríme, že to ocenia aj tí študenti, ktorí tieto alebo podobné predmety absolvovali, nakoľko si môžu zopakovať už pre nich známe poznatky. Všetky metódy priestorových analýz a interpolácie sú založené na funkciách. Matematické funkcie tvoria základ pre implementáciu analytických nástrojov do GIS-u. Preto považujeme za užitočné aspoň stručne uviesť vybrané kapitoly matematickej analýzy. Táto kapitola je zostavená tak, aby bolo možné uvedené metódy prepočítat' na jednoduchých príkladoch. Rozdelili sme ju do 3 čiastkových kapitol.

4.1 Interpolačný polynóm

Interpolačný polynóm sa využíva pre interpoláciu malého počtu hodnôt, ktoré nie sú zaťažené chybou merania, pričom chceme dosiahnuť, aby výsledná funkcia prechádzala danými bodmi. Podobne je to aj v prípade splajnov, ktoré sú navrhnuté pre väčší počet bodov.

Pre zápis vyjadrenia priebehu funkcie sa pokúsme vychádzať z toho, že hľadáme funkciu pre určenie bodu zo súradnicami $[x_0, y_0]$, kde platí, že:

$$y_0 = f(x_0) \quad (4.1)$$

$$f(x_0) = P_{n+1}(x_0) \quad (4.2)$$

pričom počet bodov vstupného bodového poľa $n > 2$ a ktorý prechádza bodmi zo súradnicami $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, ..., $[x_{n+1}, y_{n+1}]$, pričom platí, že:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \quad (4.3)$$

Hodnotu y_0 v bode x_0 určíme na základe interpolačného polynómu $P_{n+1}(x_0)$, ktorého hodnotu vyjadríme pomocou kombinácií funkcií $f_{n+1}(x_0)$, kde platí, že:

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Potom platí, že:

$$f_1(x_0) = \frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{n+1})} \quad (4.4)$$

$$f_2(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_{n+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{n+1})} \quad (4.5)$$

$$f_i(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{i-1})(x_0 - x_{i+1}) \dots (x_0 - x_{n+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} \quad (4.6)$$

$$f_{n+1}(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} \quad (4.7)$$

Interpoláčny polynóm $P_{n+1}(x_0)$, následne dostaneme ako kombináciu funkcií $f_{n+1}(x_0)$ pre súradnice v bodoch y_1 až y_{n+1} nasledovne:

$$P_{n+1}(x_0) = y_1 f_1(x_0) + y_2 f_2(x_0) + \dots + y_{n+1} f_{n+1}(x_0) \quad (4.8)$$

Čiže po dosadení vyzerá zápis polynómu nasledovne:

$$P_{n+1}(y_0) = y_1 \frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{n+1})} + y_2 \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_{n+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{n+1})} + \dots + y_{n+1} \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} \quad (4.9)$$

Uvedená funkcia sa nazýva Lagrangeov interpolačný polynóm ($P_{n+1}(y_0)$). Uvedený postup si môžeme demonštrovať na nasledujúcom príklade, ktorý bol spracovaný podľa práce Fajmon a Ružičková (2005).

Sú nám známe hodnoty $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ a pomocou Lagrangeovho polynómu vypočítajme hodnotu y pre $x = 1$.

i	1	2	3	4
x	-1	0	2	3
y	5	10	2	1

Najskôr si vyjadríme $f(x_0)$, resp. $P_{n+1}(x_0)$. Po dosadení do všeobecného tvaru rovnice dostaneme tvar:

$$P_{n+1}(x_0) = 5 \frac{(x_0 - 0)(x_0 - 2)(x_0 - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 2)(-1 - 3)} + 10 \frac{(x_0 - (-1))(x_0 - 2)(x_0 - 3)}{(0 - (-1))(0 - 2)(0 - 3)} + 2 \frac{(x_0 - (-1))(x_0 - 0)(x_0 - 3)}{(2 - (-1))(2 - 0)(2 - 3)} + 1 \frac{(x_0 - (-1))(x_0 - 0)(x_0 - 2)}{(3 - (-1))(3 - 0)(3 - 2)} = x^3 - 4x^2 + 10 \quad (4.10)$$

Čiže, po dosadení

$$y_0 = f(x_0) \quad (4.11)$$

$$f(x_0) = P_{n+1}(x_0) \quad (4.12)$$

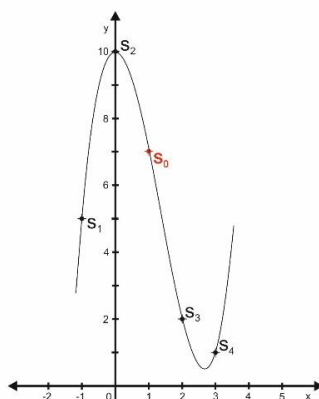
dostávame tvar

$$y_0 = x^3 - 4x^2 + 10 \quad (4.13)$$

a teda hodnota y pre $x = 1$ je:

$$y_{x=1} = 1^3 - 4 * 1^2 + 10 = 7 \quad (4.14)$$

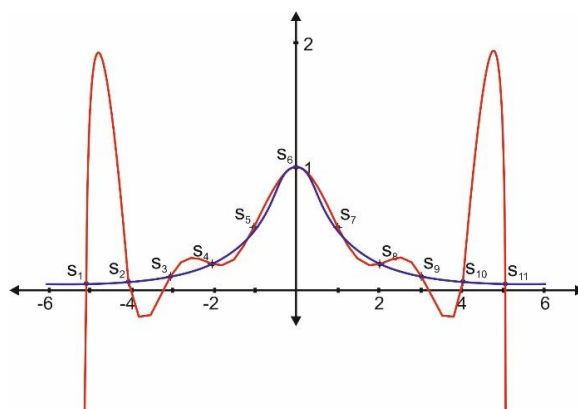
Grafické znázornenie priebehu funkcie je na obr. 4.1.



Obr. 4.1 Znáznornenie priebehu funkcie.

Lagrangeov interpolačný polynóm je nepraktický v tom, že ak chceme pridať ďalší vstupný bod, celý polynóm musíme prepočítavať znova. Existuje viacero postupov pre odhad funkcie $y_0 = f(x_0)$ napr. Newtonov interpolačný polynóm, ktorý pri výpočte určuje koeficienty pomocou tzv. pomerných diferencií. Dôležité je, že výsledný polynóm je rovnaký bez ohľadu na použitý postup. Dôležité je hlavne to, aby sme polynomickú funkciu vedeli nájsť čo najrýchlejšie.

V prípade väčšieho počtu vstupných bodov však dochádza ku situáciám, kedy polynomická funkcia prechádza zadanými bodmi, ale mimo nich sa veľmi rozkmitá. (obr. 4.2) Preto napríklad už pri desiatich bodoch sa interpolačný polynóm nehodí pre odhad hodnôt a je potrebné hľadať iné metódy. Riešenie je v použití splajnov.



Obr. 4.2 Body s_1 až s_{11} znázorňujú vstupné bodové pole. Modrou čiarou je znázornená funkcia $f(x_0) = \frac{1}{1+x^2}$, červenou čiarou je znázornený nevhodný interpolačný polynóm.

4.2 Splajn

Splajny by sme mohli charakterizovať ako sústavu polynómov nižšieho stupňa na rôznych intervaloch, ktoré na seba navzájom nadväzujú v bodoch vstupného bodového poľa. Fajmon a Ružičková (2005) uvádza charakteristiky pre niekoľko radov polynomických funkcií:

1. **Lineárny splajn** (1 - rád) predstavuje sústavu lineárnych funkcií, ktoré na seba nadväzujú v zadaných bodoch. Ide vlastne o lomenú čiaru spájajúcu body vstupného bodového poľa. Jej nevýhodou je to, že funkcia má veľmi ostré hrany v zadaných bodoch. Z tohto dôvodu nie je možné určiť deriváciu v zadaných bodoch. Zároveň lineárny splajn môže medzi zadanými bodmi príliš oscilovať od skutočného povrchu (analogicky ako TIN).

2. **Kvadratický splajn** (2 - rád) by sme mohli charakterizovať ako sústavu kvadratických funkcií, ktoré na seba v zadaných bodov nadväzujú funkčnou hodnotou ako aj hodnotou prvej derivácie. Aj keď má lepšie vlastnosti ako lineárny splajn, jeho negatívnou vlastnosťou je jeho zotrvačnosť, nakoľko každé dva susedné body sú spojené parabolou, ktorá „prestrelí“ bod $[x_i, y_i]$, kým naberie „správny“ smer k bodu $[x_{i+1}, y_{i+1}]$. (obr. 4.2)
3. **Kubický splajn** (3 - rád) je sústava kubických funkcií, ktoré na seba nadväzujú funkčnou hodnotou, ako aj prvou a druhou deriváciou. Kubický splajn má veľmi dobré vlastnosti, pretože prechádza zadanými bodmi a vystihuje priebeh lepšie ako parabola a v každom bode existuje prvá a druhá derivácia.

Okrem lineárneho, kvadratického a kubického splajnu existujú aj ďalšie metódy, napr. logaritmická metóda.

Aj napriek výpočtovej náročnosti kubického splajnu si podrobnejšie predstavíme práve túto metódu, nakoľko má veľmi vhodné vlastnosti pre odvodenie parametrov prvej a druhej derivácie. Prirodzenú kubickú funkciu $k(x_0)$ by sme mohli zapísať vo všeobecnom tvare

$$k(x_0) = a_i + b_i(x_0 - x_i) + c_i(x_0 - x_i)^2 + d_i(x_0 - x_i)^3 \quad (4.15)$$

Treba mať na pamäti, že kubickú funkciu budeme prekladať cez susedné body vstupného bodového poľa podľa intervalov $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$, pričom $i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$.

Pre každý subinterval musia byť splnené nasledujúce podmienky:

- a) polynómy prechádzajú zadanými bodmi;

$$k_i(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n \quad k_n(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) \quad (4.16)$$

- b) polynómy na seba nadväzujú;

$$k_i(x_{i+1}) = k_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.17)$$

- c) prvá derivácia polynómov na seba nadväzuje;

$$k'_i(x_{i+1}) = k'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.18)$$

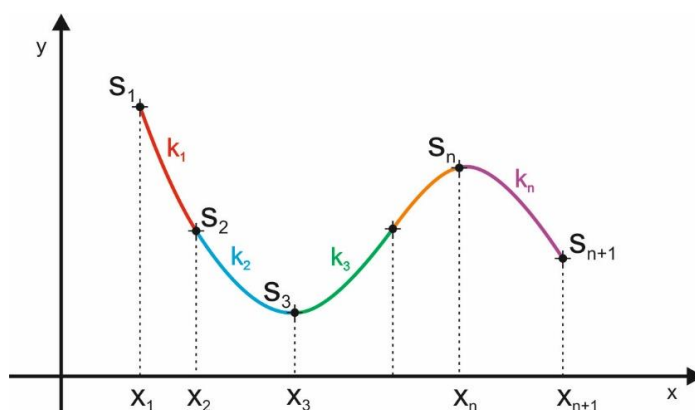
- d) druhá derivácia polynómov na seba nadväzuje.

$$k''_i(x_{i+1}) = k''_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.19)$$

A zároveň platí:

$$k(x_0) = f(x_0) \quad (4.20)$$

$$f(x_0) = y_0 \quad (4.21)$$



Obr. 4.3 Ukážka splajnu ako systému polynomických funkcií $k_1(x_0)$, pre interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, $k_2(x_0)$ pre interval $\langle x_2, x_3 \rangle$, až $k_n(x_0)$ pre interval $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$, ktoré prechádzajú bodmi s_1, s_2 , až s_{3n+1} .

Postup pre určenie prirodzeného kubické splajnu si vysvetlíme na nasledujúcom príklade, ktorý bol spracovaný podľa práce Fajmon a Ružičková (2005). Nech vstupné bodové pole má takéto hodnoty:

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	2	4
y_i	2	4	3	-1

Riešenie vychádza z nasledujúcej sústavy kubických funkcií pre body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, $[x_4, y_4]$.

$$k_1(x_0) = a_1 + b_1(x_0 - x_1) + c_1(x_0 - x_1)^2 + d_1(x_0 - x_1)^3, \text{ pre } x_0 \in \langle x_1; x_2 \rangle; \quad (4.23)$$

$$k_2(x_0) = a_2 + b_2(x_0 - x_2) + c_2(x_0 - x_2)^2 + d_2(x_0 - x_2)^3, \text{ pre } x_0 \in \langle x_2; x_3 \rangle; \quad (4.24)$$

$$k_3(x_0) = a_3 + b_3(x_0 - x_3) + c_3(x_0 - x_3)^2 + d_3(x_0 - x_3)^3, \text{ pre } x_0 \in \langle x_3; x_4 \rangle; \quad (4.25)$$

pričom je potrebné určiť 12 neznámych koeficientov, ktoré nájdeme dosadením hodnôt:

$$k_1(x_0) = a_1 + b_1(x_0 - (-1)) + c_1(x_0 - (-1))^2 + d_1(x_0 - (-1))^3, \text{ pre } x_0 \in \langle -1; 0 \rangle; \quad (4.26)$$

$$k_2(x_0) = a_2 + b_2(x_0 - 0) + c_2(x_0 - 0)^2 + d_2(x_0 - 0)^3, \text{ pre } x_0 \in \langle 0; 2 \rangle; \quad (4.27)$$

$$k_3(x_0) = a_3 + b_3(x_0 - 2) + c_3(x_0 - 2)^2 + d_3(x_0 - 2)^3, \text{ pre } x_0 \in \langle 2; 4 \rangle; \quad (4.28)$$

Po dosadení hodnôt do funkcie podľa jednotlivých podmienok dostaneme:

- a) **polynómy prechádzajú zadanými bodmi**
musí platiť, že:

$$k_1(-1) = 2 \quad (4.29)$$

po dosadení $x_0 = -1$

$$k_1(x_0) = a_1 + b_1(-1 - (-1)) + c_1(-1 - (-1))^2 + d_1(-1 - (-1))^3 \Rightarrow a_1 = 2 \quad (4.30)$$

$$k_2(0) = 4 \quad (4.31)$$

po dosadení $x_0 = 0$

$$k_2(0) = a_2 + b_2(0 - 0) + c_2(0 - 0)^2 + d_2(0 - 0)^3 \Rightarrow \mathbf{a_2 = 4} \quad (4.32)$$

$$k_3(2) = 3 \quad (4.33)$$

po dosadení $x_0 = 2$

$$k_3(2) = a_3 + b_3(2 - 2) + c_3(2 - 2)^2 + d_3(2 - 2)^3 \Rightarrow \mathbf{a_3 = 3} \quad (4.34)$$

$$k_3(4) = -1 \quad (4.35)$$

po dosadení $x_0 = 4$

$$k_3(2) = 3 + b_3(4 - 2) + c_3(4 - 2)^2 + d_3(4 - 2)^3 \Rightarrow \mathbf{3 + 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -1} \quad (4.36)$$

b) polynómy na seba nadväzujú

musí platiť, že:

$$k_1(0) = k_2(0) \quad (4.37)$$

po dosadení $x_0 = 0$

$$2 + b_1(0 - (-1)) + c_1(0 - (-1))^2 + d_1(0 - (-1))^3 = 4 + b_2(0 - 0) + c_2(0 - 0)^2 + d_2(0 - 0)^3 \\ \Rightarrow \mathbf{2 + b_1 + c_1 + d_1 = 4} \quad (4.38)$$

a

$$k_2(2) = k_3(2) \quad (4.39)$$

po dosadení $x_0 = 2$

$$4 + b_2(2 - 0) + c_2(2 - 0)^2 + d_2(2 - 0)^3 \\ = a_3 + b_3(2 - 2) + c_3(2 - 2)^2 + d_3(2 - 2)^3 \\ \Rightarrow \mathbf{4 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 3} \quad (4.40)$$

c) prvá derivácia polynómov na seba nadväzuje

musí platiť, že:

$$k'_1(0) = k'_2(0) \quad (4.41)$$

po dosadení $x_0 = 0$

$$2 + b_1(0 - (-1)) + c_1(0 - (-1))^2 + d_1(0 - (-1))^3 \Rightarrow k'_1(0) \Rightarrow b_1 + 2c_1 + 3d_1 \quad (4.42)$$

$$4 + b_2(0 - 0) + c_2(0 - 0)^2 + d_2(0 - 0)^3 \Rightarrow k'_2(0) \Rightarrow b_2 \quad (4.43)$$

čiže výsledok je

$$\mathbf{b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2} \quad (4.44)$$

a

$$k'_2(2) = k'_3(2) \quad (4.45)$$

po dosadení $x_0 = 2$

$$4 + b_2(2 - 0) + c_2(2 - 0)^2 + d_2(2 - 0)^3 \Rightarrow k'_2(2) \Rightarrow b_2 + 4c_2 + 12d_2 \quad (4.46)$$

$$3 + b_3(2 - 2) + c_3(2 - 2)^2 + d_3(2 - 2)^3 \Rightarrow k'_3(2) \Rightarrow b_3 \quad (4.47)$$

čiže výsledok je

$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 = b_3 \quad (4.48)$$

d) druhá derivácia polynómov na seba nadväzuje

musí platiť, že:

$$k''_1(0) = k''_2(0) \quad (4.49)$$

po dosadení $x_0 = 0$

$$2 + b_1(0 - (-1)) + c_1(0 - (-1))^2 + d_1(0 - (-1))^3 \Rightarrow k''_1(0) \Rightarrow 2c_1 + 6d_1 \quad (4.50)$$

$$4 + b_2(0 - 0) + c_2(0 - 0)^2 + d_2(0 - 0)^3 \Rightarrow k''_2(0) \Rightarrow 2c_2 \quad (4.51)$$

čiže výsledok je

$$2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \quad (4.52)$$

a

$$k''_2(2) = k''_3(2) \quad (4.53)$$

po dosadení $x_0 = 2$

$$4 + b_2(2 - 0) + c_2(2 - 0)^2 + d_2(2 - 0)^3 \Rightarrow k''_2(2) \Rightarrow 2c_2 + 12d_2 \quad (4.54)$$

$$3 + b_3(2 - 2) + c_3(2 - 2)^2 + d_3(2 - 2)^3 \Rightarrow k''_3(2) \Rightarrow 2c_3 \quad (4.55)$$

čiže výsledok je

$$2c_2 + 12d_2 = 2c_3 \quad (4.56)$$

Takto nám vzniklo 10 rovníc o 12 neznámych, z toho prvé tri sú určené hneď konštantami.

$$a_1 = 2 \quad (4.57)$$

$$a_2 = 4 \quad (4.58)$$

$$a_3 = 3 \quad (4.59)$$

$$3 + 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -1 \quad (4.60)$$

$$2 + b_1 + c_1 + d_1 = 4 \quad (4.61)$$

$$4 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 3 \quad (4.62)$$

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \quad (4.63)$$

$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 = b_3 \quad (4.64)$$

$$2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \quad (4.65)$$

$$2c_2 + 12d_2 = 2c_3 \quad (4.66)$$

Sústavu týchto rovníc je možné ešte doplniť o ďalšie podmienky, ktoré sa týkajú tzv. prirodzeného kubického splajnu a teda, že druhá derivácia v krajných bodoch prvého a posledného intervalu sa bude rovnať 0. Uvedenú podmienku môžeme zapísať nasledovne.

$$k_1''(-1) = 0 \quad (4.67)$$

po dosadení $x_0 = -1$

$$2 + b_1(-1 - (-1)) + c_1(-1 - (-1))^2 + d_1(-1 - (-1))^3 \Rightarrow k_1''(0) \Rightarrow 2c_1 \quad (4.68)$$

čiže výsledok je

$$2c_1 = 0 \quad (4.69)$$

a

$$k_3''(4) = 0 \quad (4.70)$$

po dosadení $x_0 = 4$

$$3 + b_3(4 - 2) + c_3(4 - 2)^2 + d_3(4 - 2)^3 \Rightarrow k_3''(4) \Rightarrow 2c_3 + 12d_3 \quad (4.71)$$

čiže výsledok je

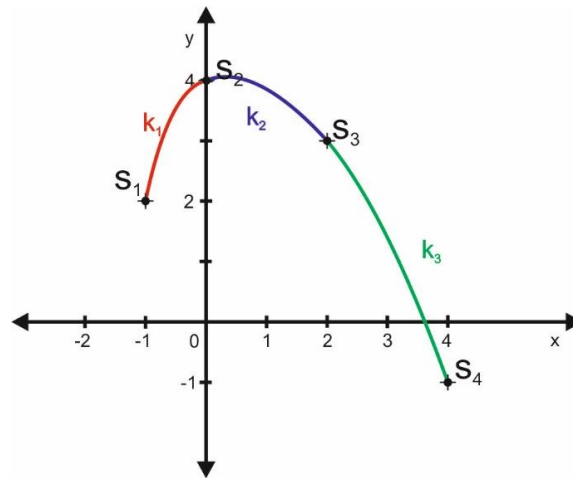
$$2c_3 + 12d_3 = 0 \quad (4.72)$$

Po vhodnej úprave systému rovníc dostaneme nasledujúci výsledok:

$$k_1(x_0) = 2 + \frac{105}{44}(x_0 + 1) - \frac{17}{44}(x_0 + 1)^3 \text{ pre } x_0 \in \langle -1; 0 \rangle; \quad (4.73)$$

$$k_2(x_0) = 4 + \frac{27}{22}(x_0) - \frac{51}{44}(x_0)^2 + \frac{13}{88}(x_0)^3 \text{ pre } x_0 \in \langle 0; 2 \rangle; \quad (4.74)$$

$$k_3(x_0) = 3 - \frac{18}{11}(x_0 - 2) - \frac{3}{11}(x_0 - 2)^2 + \frac{1}{22}(x_0 - 2)^3 \text{ pre } x_0 \in \langle 2; 4 \rangle; \quad (4.75)$$



Obr. 4.4 Náčrt výpočtu pre hľadané funkcie $k_1(x_0)$, $k_2(x_0)$, $k_3(x_0)$, ktoré majú prechádzať bodmi s_1 , s_2 , s_3 a s_4 .

4.3 Metóda najmenších štvorcov

Pri predchádzajúcich metódach sme požadovali, aby funkcia prechádzala zadanými bodmi. Metóda najmenších štvorcov je navrhnutá tak, aby funkcia mala istú voľnosť, čo znamená, že nemusí prechádzať zadanými bodmi, avšak mala by prechádzať v ich blízkosti. Podobne ako v prípade splajnov je možné ju požiť pre väčší počet bodov (dokonca aj viac bodov s rovnakou súradnicou). Metóda bola navrhnutá pre odhad hodnôt dát získané experimentálnym meraním. Jednotlivé hodnoty môžu byť zaťažené chybou merania, ktoré vznikli v dôsledku metódy merania. Ak by sme chyby nezohľadňovali, výsledný povrch by kopíroval chybu merania, a preto by bol nereálny.

Najjednoduchším prípadom je lineárna závislosť, ktorej výsledkom je priamka. Inými slovami by sme mohli povedať, že pre vstupné bodové pole sa snažíme nájsť takú lineárnu funkciu, ktorá bude prechádzať bodmi vstupného bodového poľa čo najbližšie k nim. Vychádzajme preto so situácie, že sú nám známe body x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ a funkčné hodnoty v nich sú y_i . Budeme teda hľadať priamku, pre ktorú je možné vyjadriť vzťahom

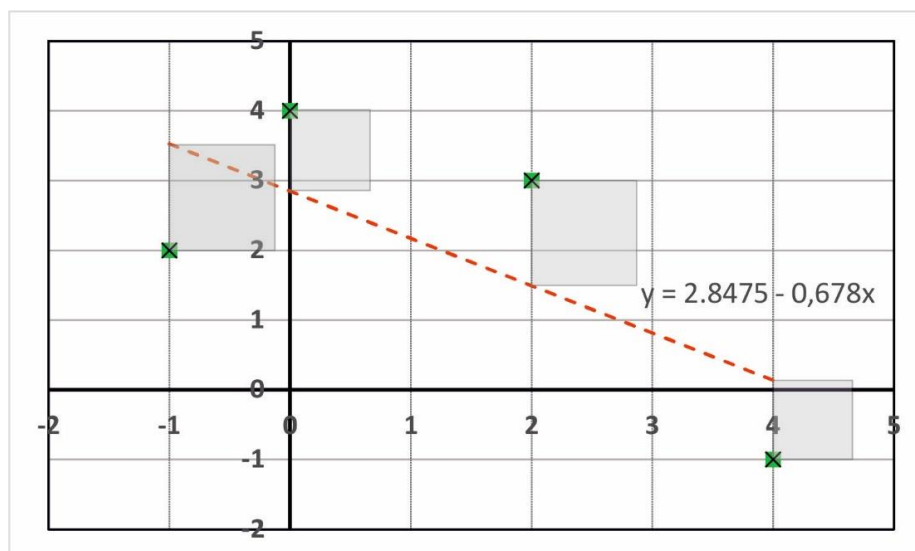
$$y = c_1 + c_2 x \quad (4.76)$$

Zároveň platí, že priamka má prechádzať zadanými bodmi v najbližšej možnej vzdialenosti. Preto si vyjadríme chybu odhadu e_i , pre ktorú platí vzťah:

$$e_i = y_i - y(x_i) = y_i - c_1 - c_2 x_i \quad (4.77)$$

Najlepším kritériom pre dosiahnutie najbližšej možnej vzdialenosti je, aby súčet štvorcov $S(c_1, c_2)$ (druhých mocnín chýb) bol minimálny, čo môžeme zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} S(c_1, c_2) &= (y_1 - c_1 - c_2 x_1)^2 + (y_2 - c_1 - c_2 x_2)^2 + \dots + (y_n - c_1 - c_2 x_n)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - c_1 - c_2 x_i)^2 = \min S(c_1, c_2) \end{aligned} \quad (4.78)$$



Obr. 4.5 Obrázok znázorňuje priebeh funkcie $y = 2,8475 - 0,678x$ (červená prerušovaná čiara) pre vstupné bodové pole (krížiky so zeleným podkladom), pričom priamka prechádza medzi bodmi tak, aby súčet štvorcov (šedé štvorce) vypočítaných zo vzdialeností bodov od priamky určenej hľadanou funkciou bol minimálny.

Ostré lokálne minimum funkcie $S(c_1, c_2)$ môže nastať v bode (c_1, c_2) , v ktorom sú nulové parciálne derivácie, čiže platí:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \text{ a } \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0 \quad (4.79)$$

Po dosadení a výpočte parciálnej derivácie pre c_1 a c_2 dostaneme sústavu rovníc:

$$c_1(n) + c_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.80)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.81)$$

Postup pre aproximáciu funkcie si môžeme prejsť na nasledujúcom príklade. Nech vstupné bodové pole má takéto hodnoty:

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	2	4
y_i	2	4	3	-1

Najskôr vypočítame potrebné koeficienty, aby sme ich mohli dosadiť do sústavy rovníc. Kvôli prehľadnosti ich uvedieme v tabuľke.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	2	1	-2
2	0	4	0	0
3	2	3	4	6
4	4	-1	16	-4
Σ	5	8	21	0

Po dosadení do sústavy rovníc

$$c_1(n) + c_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.82)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.83)$$

dostávame tvar rovníc nasledovne:

$$4c_1 + 5c_2 = 8 \quad (4.84)$$

$$5c_1 + 21c_2 = 0 \quad (4.85)$$

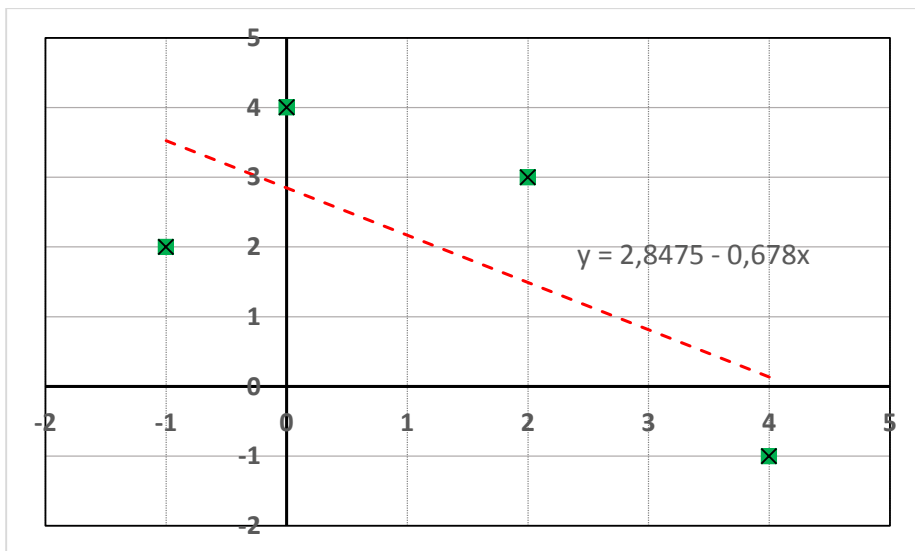
Riešením týchto rovníc je

$$c_1 = 2,8475 \quad (4.86)$$

$$c_2 = -0,678 \quad (4.87)$$

Hľadanú priamku vyjadríme funkciou (obr. 4.6)

$$y = 2,8475 - 0,678x \quad (4.88)$$



4.6 Priebeh vypočítanej lineárnej funkcie

V prípade, že chceme hľadať priebeh funkcie pre body pomocou polynómov vyššieho rádu, postup bude analogický, ako v prípade priamky, resp. polynomickej funkcie prvého rádu. Všeobecný zápis pre polynomickeú funkciu m rádu je:

$$S(m) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_mx^{m-1} + c_{m+1}x^m \quad (4.89)$$

Pričom by sme podobne ako u priamky dostali sústavu rovníc podľa rádu polynomickej funkcie, ktorých všeobecný zápis vyzerá nasledovne:

$$c_1(n) + c_2 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + c_m \sum_{i=1}^n x_i^{m-1} = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.90)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + c_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.91)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + c_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \quad (4.92)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i^m + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + c_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \quad (4.93)$$

Postup si môžeme demonštrovať na rovnakých vstupných bodoch, ako v prvom prípade. Tentokrát však budeme hľadať polynomickeú funkciu 2 rádu, ktorej priebeh vyjadruje parabola. Zo všeobecného zápisu si odvodíme sústavu rovníc:

$$c_1(n) + c_2 \sum_{i=1}^n x_i + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.94)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.95)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \quad (4.96)$$

Najskôr si vypočítame potrebné koeficienty a zapíšeme ich do tabuľky.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	-1	2	1	-1	1	-2	2
2	0	4	0	0	0	0	0
3	2	3	4	8	16	6	12
4	4	-1	16	64	256	-4	-16
Σ	5	8	21	71	273	0	-2

Po dosadení do sústavy rovníc dostávame nasledujúci tvar:

$$4c_1 + 5c_2 + 21c_3 = 8 \quad (4.97)$$

$$5c_1 + 21c_2 + 71c_3 = 0 \quad (4.98)$$

$$21c_1 + 71c_2 + 273c_3 = -2 \quad (4.99)$$

Výsledkom týchto rovníc je

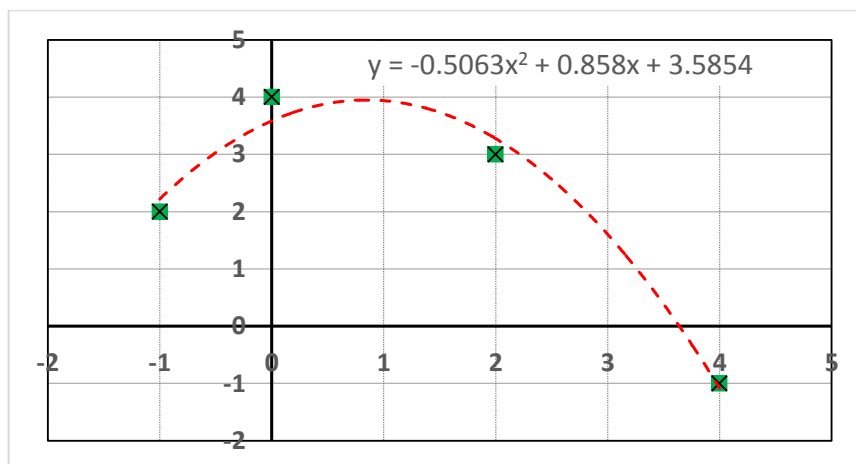
$$c_1 = 3,5854 \quad (4.100)$$

$$c_2 = 0,858 \quad (4.101)$$

$$c_3 = -0,5063 \quad (4.102)$$

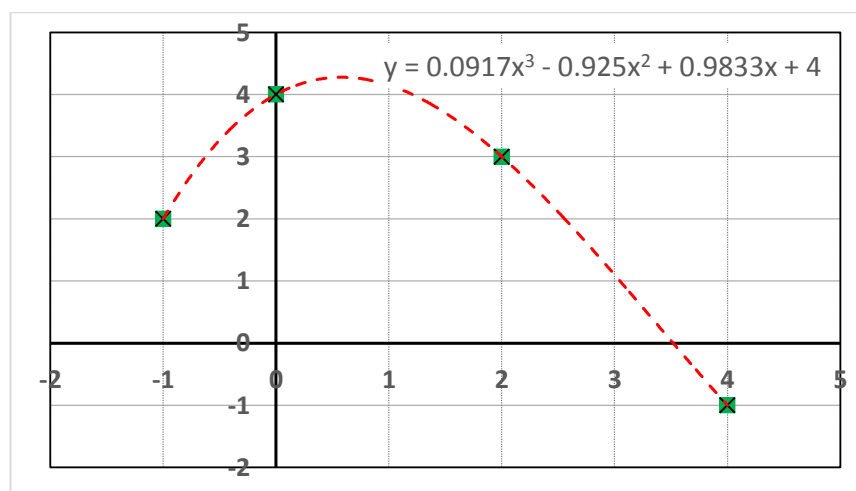
Hľadanú parabolu (obr. 4.7) teda vyjadríme funkciou

$$y = -0,5063x^2 + 0,858x + 3,5854 \quad (4.103)$$



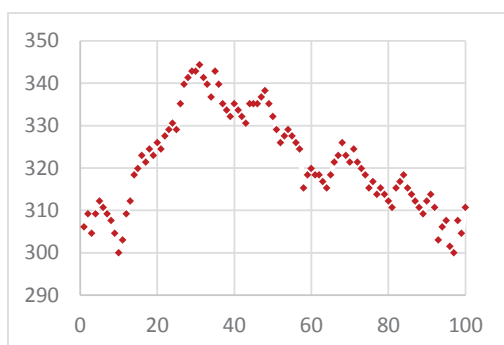
4.7 Priebeh vypočítanej polynomickej funkcie 2. rádu.

Ak by sme hľadali polynomickeú funkciu 3 rádu pre rovnaké vstupné bodové pole, výsledkom by bola funkcia, ktorej priebeh vyjadruje nasledujúci graf na obr. 4.8.

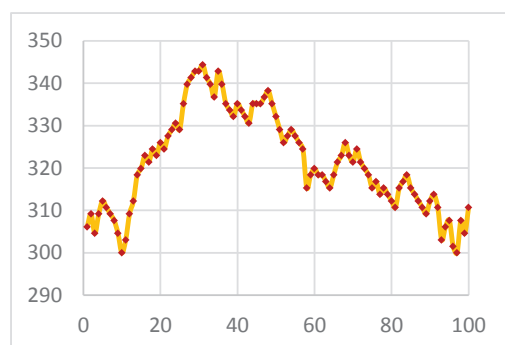


4.7 Priebeh vypočítanej polynomickej funkcie 3. rádu.

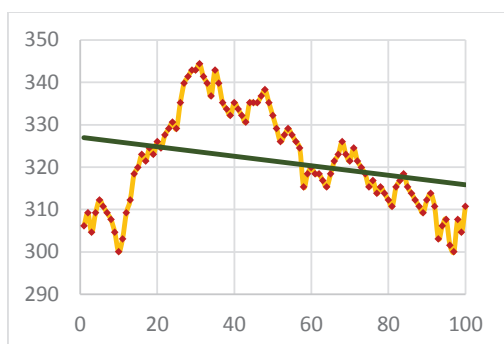
Z grafu je zrejmé, že uvedená funkcia už prechádza vstupnými bodmi. Uvedený príklad má malý počet bodov, kvôli výpočtovej jednoduchosti a názornosti. Uvažovať v tomto prípade o vyššom ráde polynomickej funkcie už nemá zmysel, lebo výsledkom bude stále polynomickeá funkcia 3 rádu. V praxi sa však stretávame so súbormi bodového poľa, ktoré majú tisíce až milióny bodov, pre ktoré je možné počítať polynomickeé funkcie aj vyššieho rádu. Najčastejšie sa používa výpočet polynomickej funkcie do 3 rádu, v ojedinelých prípadoch do 6 rádu. Pre vyjadrenie priebehu sledovaného javu vyššími rádmami polynomickej funkcie sa v geoaplikáciach stretávame veľmi zriedkavo. Pre zopakovanie a názornosť uvádzame grafy s polynomickeými funkciami do 6 rádu, kde vstupné bodové pole má 100 hodnôt. Výsledné grafy aj s priebehom funkcie sú zobrazené na obr. 4.8.



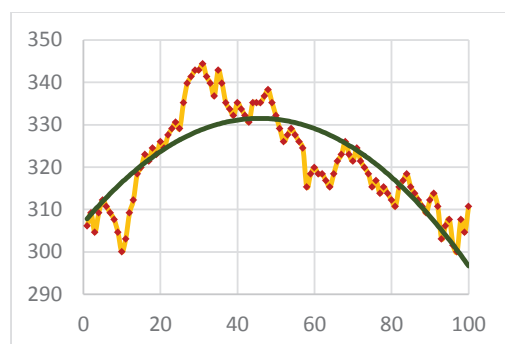
A. Vstupné bodové pole hodnôt



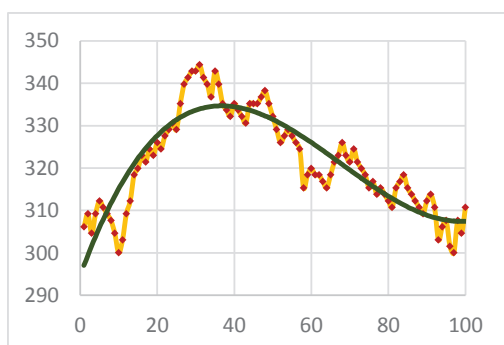
B. Vstupné bodové pole hodnôt spojené splajnom (hladkými krivkami)



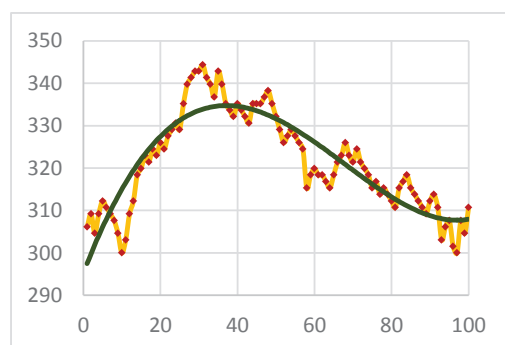
C. Polynomická funkcia 1 rádu
 $y = -0,1125x + 327,07$



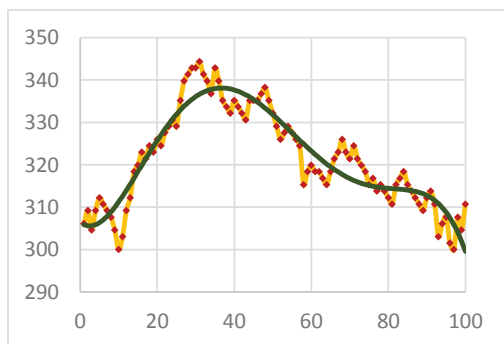
D. Polynomická funkcia 2 rádu
 $y = -0,0118x^2 + 1,0813x + 306,77$



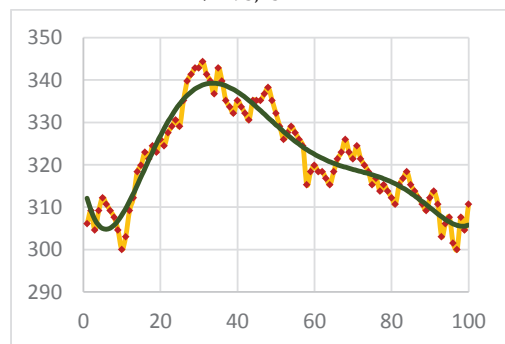
E. Polynomická funkcia 3 rádu
 $y = 0,0002x^3 - 0,0465x^2 + 2,4903x + 294,62$



F. Polynomická funkcia 4 rádu
 $y = 0,0000003x^4 + 0,0002x^3 - 0,0421x^2 + 2,3899x + 295,15$



G. Polynomická funkcia 5 rádu
 $y = -0,0000002x^5 + 0,0000624x^4 - 0,0054x^3 + 0,1712x^2 - 0,7499x + 306,46$



H. Polynomická funkcia 6 rádu
 $y = 0,00000001x^6 - 0,00000241x^5 + 0,00031x^4 - 0,019x^3 + 0,515x^2 - 4,332x + 315,93$

Obr. 4.8 Znáznornenie priebehu polynomických funkcií do 6. rádu

5 PRIESTOROVÉ ANALÝZY

Transformácie dát, priestorové analýzy a modelovanie predstavujú jadro GIS-u a práve táto oblasť vymedzuje GIS oproti iným softvérom pracujúcim s grafickými dátami (napr. CAD, CAM). V týchto operáciách sú zakódované mnohé geopriestorové metódy prevzaté z aplikačných disciplín, vrátane geografie. Zaužívaný je pojem priestorové analýzy, i keď by bolo vhodné používať skôr pojem geopriestorové na vymedzenie ich zamerania týkajúceho sa geosféry, resp. krajiny.

Priestorové analýzy umožňujú odhaliť mnohé väzby a súvislosti v krajine, sú preto jedným zo základných nástrojov geografa. Pomocou nich používateľ GIS-u z dát získava informácie potrebné pre priestorové rozhodovanie a manažment krajiny. Spolu s vizualizáciou a kartografickou prezentáciou výsledkov umožňujú vytvárať zrozumiteľné podklady pre iných odborníkov alebo rozhodovací proces.

Základom pre modelovanie procesov a javov v krajine je formalizácia vybraných pojmov, kde na reprezentáciu krajiny sa nevyužíva klasický objektový prístup, ale systémový prístup ku krajine, ako to bližšie vysvetľuje Koreň (2006), Krcho (1990) a ďalší. Hlavný princíp spočíva v tom, že všetky vlastnosti krajiny sa vyjadrujú skalárnymi a vektorovými poliami. Pole sa chápe ako funkcia, ktorá vyjadruje vlastnosti územia prostredníctvom vhodného oboru hodnôt. Jednotlivým vlastnostiam krajiny sa priradzuje špecifický obor hodnôt, ktorý sa formálne zapisuje do samostatných súborov, ktoré nazývame údajové vrstvy. Takýmto spôsobom je krajina rozložená na samostatné vrstvy. Údajové vrstvy je možné na seba nakladať, nakoľko sú priestorovo lokalizované pomocou súradnicových systémov. Jednotlivé údajové vrstvy potom vstupujú do modelovania určitých procesov a javov. Výber dátového modelu, ako digitálnej reprezentácie krajiny, je dôležitý pre spôsob ďalšieho spracovania dát. Niektoré analýzy sú analogické pre oba dátové modely (napr. reklasifikácia, analýza susedstva, tvorba zón, atď.), iné sú natoľko špecifické, že je potrebné využiť konkrétny dátový model (napr. rastrový dátový model pre modelovanie prúdenia vody metódou konečných rozdielov, vektorový model pre sieťovú analýzu). Pokiaľ naše zdrojové dáta nie sú už v tomto dátovom modeli, je potrebné pred ďalšími operáciami vykonať konverziu dátového modelu. Pri praktickom použití GIS-u je bežné, že dáta, ktoré vstupujú do GIS-u sú v rôznych dátových modeloch a formátoch, definované v odlišných súradnicových systémoch a podobne. Pokiaľ používateľ chce s týmito dátami neskôr pracovať a vykonávať priestorové analýzy, je potrebná transformácia, zjednotenie dát. Konverzie dátových modelov, ale aj transformácie súradnicových systémov môžu mať negatívny efekt na kvalitu dát. Často pri nich dochádza k strate polohovej, ale aj atribútovej presnosti, osobitne pri rastrovom dátovom modeli. Z toho dôvodu sa tieto konverzie snažíme minimalizovať a pri riešení konkrétneho problému alebo projektu už na jeho začiatku dôsledne zvažujeme výber dátového modelu, ako aj súradnicového systému. Prípadné konverzie vstupných dát preto robíme skôr na začiatku projektu a pred ďalšími operáciami. V tejto kapitole sa chceme podrobnejšie venovať vybraným geopriestorovým analýzám, ktoré sa veľmi často používajú bežne v praxi. Vybrané analýzy sa veľmi často používajú pre samotnú prípravu údajov pre ďalšie analýzy.

5.1 Analýza vzdialenosti

Určenie vzdialenosti medzi geografickými objektmi je jedna z najvýznamnejších analýz, ktoré vykonávame v GIS-e. Navyše, aj veľké množstvo geopriestorových analýz vychádza práve z určenia vzdialenosti medzi jednotlivými objektmi, resp. bodmi reprezentujúcimi objekty. Ide napríklad o priestorovú interpoláciu, sieťové analýzy, geoštatistické analýzy, klastrové analýzy a mnohé ďalšie. V GIS-och sa najviac používajú dva koncepty pre určenie vzdialenosti, resp. pri iných analýzách. Ide o Euklidovskú vzdialenosť a Manhattanskú vzdialenosť. Existujú aj ďalšie koncepty pre určenie vzdialenosti (napr. sférická, Mahalanobisova), ktoré sa využívajú pre analýzu priestorových dát., avšak im sa nebudeme venovať.

Základnou podmienkou pre meranie vzdialenosti v priestore je vyjadrenie polohy prostredníctvom súradnicových systémov. Ako z kartografie vieme, súradnicové systémy sú navrhnuté pre mapové projekcie. Po prenesení objektov na referenčnú plochu a jej rozvinutí do roviny dostávame pôdorysný obraz zemského povrchu. Následne sa jednotlivým objektom definuje súradnicový systém.

Jedným z najpoužívanějších metód pre určenie vzdialenosti je tzv. Euklidova vzdialenosť (alebo tiež geometrická). Vypočíta sa na základe výpočtu dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka a jej výpočet je založený na Pytagorovej vete, pričom ju môžeme určiť na základe nasledujúceho vzťahu.

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} \quad (5.1)$$

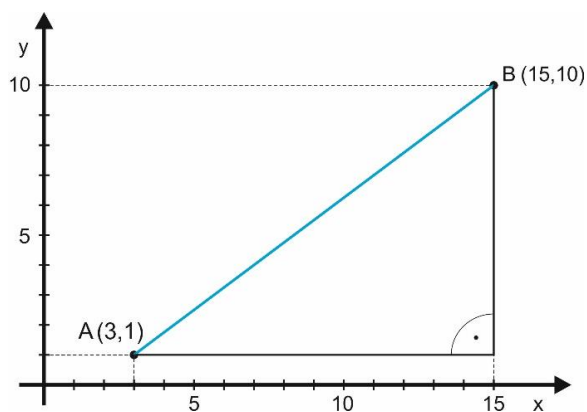
kde

$d_{(A,B)}$ – je vzdialenosť medzi bodmi A a B

A_x a B_x – x-ové súradnice bodov A a B,

A_y a B_y – y-ové súradnice bodov A a B.

Určenie vzdialenosti pomocou Euklidovského priestoru je znázornený na obr. 5.1.



Obr. 5.1 Grafické znázornenie výpočtu Euklidovskej vzdialenosti medzi bodmi A a B

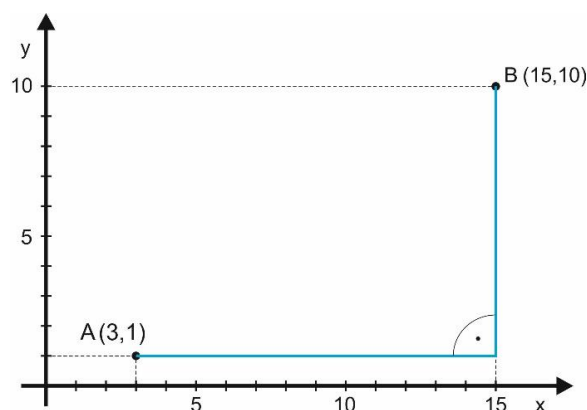
Výpočet vzdialenosti $d_{(A,B)}$ medzi bodmi A a B potom bude nasledovný:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(3 - 15)^2 + (1 - 10)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \quad (5.2)$$

Manhattanská vzdialenosť sa tiež označuje ako vzdialenosť mestských blokov. Názov je odvodený od štruktúry ulíc v Manhattane, kde pri presune z jedného miesta na druhé je nutné rešpektovať štruktúru mestských blokov, ktorá sa podobá gridu. Vzdialenosť je možné odvodiť pomocou nasledujúceho vzťahu.

$$d_{(A,B)} = |A_x - B_x| + |A_y - B_y| \quad (5.3)$$

Grafické znázornenie Manhattanskej vzdialenosti ilustruje obr. 5.2.



Obr. 5.2 Grafické znázornenie výpočtu Manhattskej vzdialenosti medzi bodmi A a B

Po dosadení do vzorca, je možné vypočítať Manhattsú vzdialenosť.

$$d_{(A,B)} = |A_x - B_x| + |A_y - B_y| = |3 - 15| + |1 - 10| = 12 + 9 = 21 \quad (5.4)$$

Zovšeobecnený zápis vyjadrenia vzdialenosti reprezentuje tzv. Minkovského metrika, kde platí:

$$d_{(A,B)} = \sqrt[k]{(A_x - B_x)^k + (A_y - B_y)^k} \quad (5.5)$$

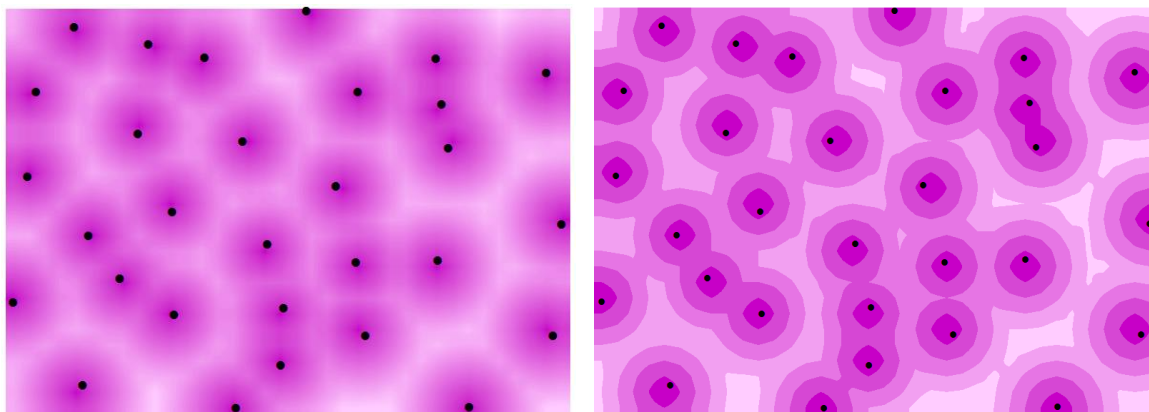
pričom platí, že ak

$k = 1$, ide o Manhattsú vzdialenosť

$k = 2$, ide o Euklidovu vzdialenosť

čím je k väčšie, tým viac je zvýraznený rozdiel medzi vzdialenými objektami (vzdialenosť narastá nelineárne).

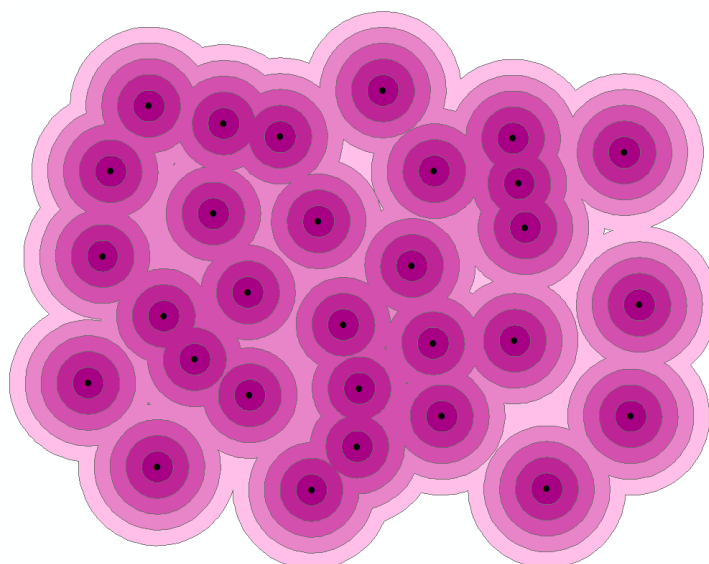
Jednou z veľmi často používaných analýz, ktorá využíva určenie vzdialenosti je tvorba vzdialenostných zón. Zóny sú počítané pomocou Euklidovej vzdialenosti. Hlásny (2007) uvádza, že charakter vzdialenostných analýz sa líši v závislosti od použitej reprezentácie priestorových údajov. V prípade analýz pre rastrovú reprezentáciu patrí k základným nástrojom tzv. vzdialenostný povrch – čiže povrch, v ktorom má každá bunka rastrovej siete určenú hodnotu vzdialenosti od jedného alebo viacerých vzdialených zdrojových objektov. Tento typ povrchu v skutočnosti nie je možné považovať za Euklidovský, nakoľko je potrebné rešpektovať štruktúru rastrovej siete. Keďže rozdiel medzi Euklidovskou vzdialenosťou a takto určenou vzdialenosťou je veľmi malý, často sa to označuje za Euklidovskú vzdialenosť. Pri práci s vektorovými dátami je možné vytvárať tzv. nárazníky (*buffers*). Nárazníkové zóny obklopujú zdrojové objekty. Pri výpočte sa zohľadňujú iba súradnice bodov x a y , Analýzy vzdialenosti pre rastrovú a vektorovú dátovú reprezentáciu podľa vzdialenostných zón sú znázornené na obr. 5.3.



A: spojitá vizualizácia vzdialenosti

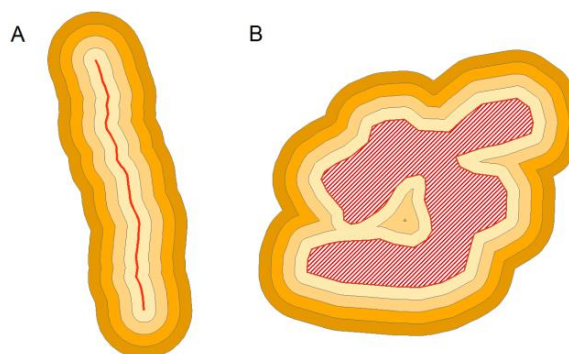
B: vizualizácia vzdialenostných (nárazníkových) zón po 50 m

Grafické znázornenie výpočtu vzdialenosti od bodov vstupného bodového poľa (čierny body) pre rastrovú dátovú reprezentáciu.

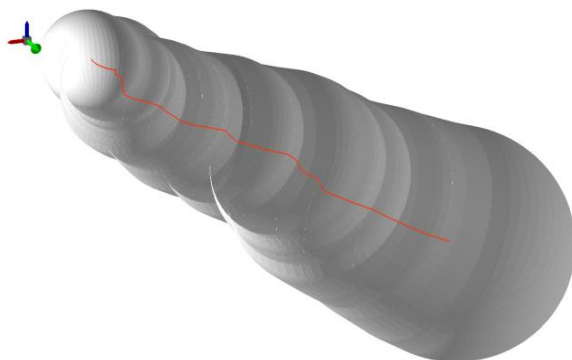


Obr. 5.3 Grafické znázornenie výpočtu vzdialenosti od bodov vstupného bodového poľa (čierny body) pre vektorovú dátovú reprezentáciu. Nárazníkové zóny znázorňujú 50 m interval.

Tvorba vzdialenostných (nárazníkových) zón je možná pre ľubovoľné tvary líniového a plošného charakteru v 2D (obr. 5.4) a 3D (obr. 5.5) priestore. Princípy je analogický ako v prípade bodov.



Obr. 5.4 Vizualizácia vzdialenostných zón (odtöne oranžovej farby). Šírka jedného intervalu je 50 m od A. línie (červená čiara) a B. polygónu (červená šrafohraničená červenou líniou) v 2D priestore.



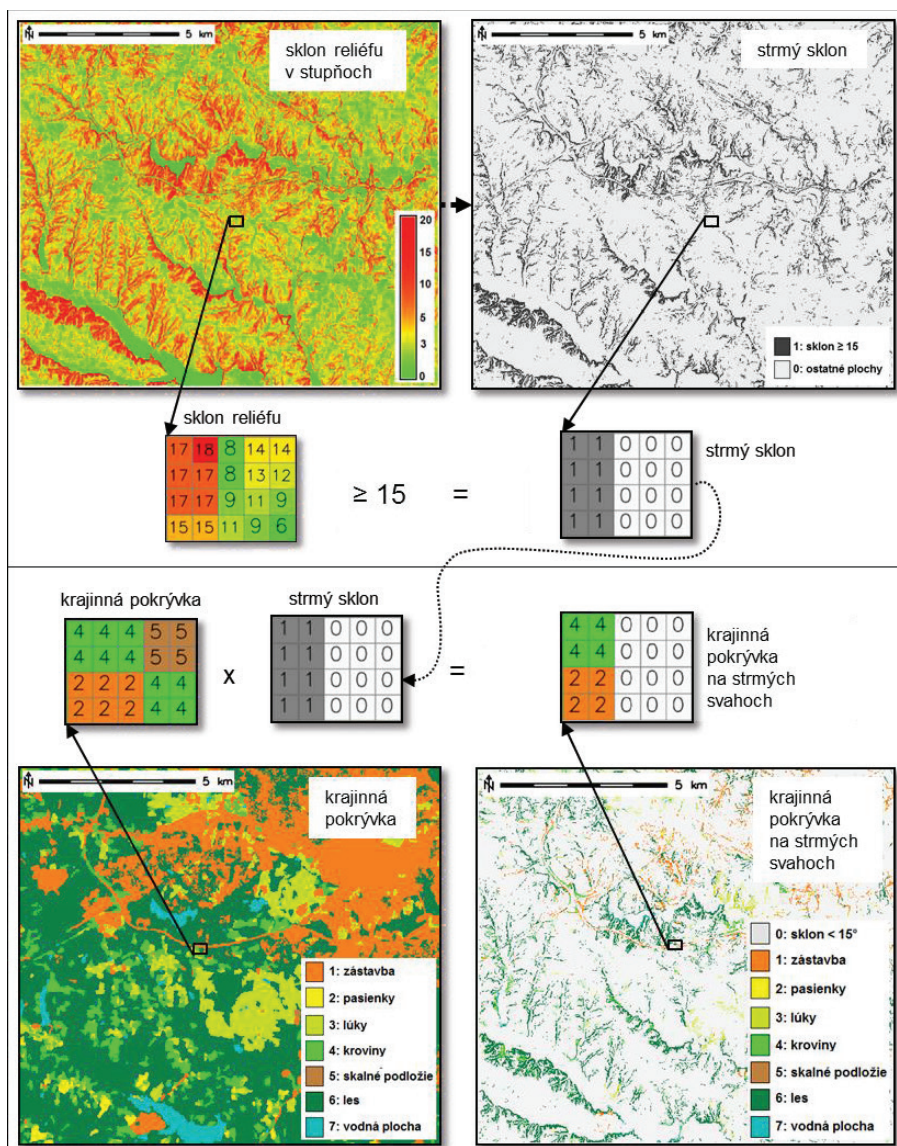
Obr. 5.5 Vizualizácia vzdialenostnej zóny 50 m od línie (červená čiara) v 3D priestore.

5.2 Mapová algebra

Hofierka et al. (2014) uvádza, že mapová algebra je základný nástroj na vykonávanie priestorových analýz v rastrovom formáte. Jej podstatou je, že jednotlivé rastrové mapy môžeme považovať za členy aritmetických výrazov, v ktorých môžeme aplikovať štandardné aritmetické a logické operácie (*, /, +, -, >, <, =, &&, !=, atď.). Okrem toho je možné použiť rastrové mapy aj ako argumenty matematických funkcií ($\cos(x)$, $\text{abs}(x)$, $\text{max}(x)$, $\log(x)$ a podobne). Vďaka tomu sa dajú jednoducho spočítať mnohé vzorce modelov krajinných procesov a javov. Tieto operácie sa vykonávajú medzi bunkami s rovnakou polohou alebo v určitom okolí danej bunky (kombinujú sa bunky s rôznou polohou v určitom okolí). V prípade GRASS GIS sa pôvodne aplikácia 2D mapovej algebry rozšírila aj na dáta 3D (modul `r3.mapcalc`).

Funkcie mapovej algebry je možné realizovať v rôznom priestorovom kontexte:

- lokálne,
- fokálne,
- zonálne,
- inkrementálne.



Obr. 5.6: Ukážka lokálnej operácie mapovej algebry pre identifikáciu krajinskej pokrývky na strmých svahoch. Zdroj Hofierka et al. (2014)

Lokálna realizácia znamená, že operácie medzi bunkami vrstiev prebiehajú vo vertikálnom smere nad sebou. Príkladom takejto operácie je realizácia tohto príkazu modulom `r.mapcalc` v GIS-e GRASS:

$$kraj_pokryv_na_strm_svahoch = (sklon \geq 15) * (krajinna_pokryvka) \quad (5.6)$$

Schematicky túto operáciu znázorňuje obr. 5.6 na príklade identifikácie typov krajinskej pokrývky na strmých svahoch. Vstupnými rastrovými vrstvami sú: sklon reliéfu a krajinná pokrývka. Najprv sú z rastrovej vrstvy sklonu reliéfu identifikované bunky so sklonom väčším alebo rovným ako 15 stupňov. Výsledkom je binárny raster, v ktorom bunky s hodnotou 1 spĺňajú uvedenú podmienku sklonu a bunky s hodnotou 0 ju nespĺňajú. Potom nasleduje operácia vynásobenia rastrovej vrstvy krajinskej pokrývky s binárnym rastrom strmých svahov. Navzájom sú násobené hodnoty korešpondujúcich si buniek s rovnakou polohou. Vzniká výsledný raster (*kraj_pokryv_na_strm_svahoch*) s hodnotami krajinskej pokrývky v bunkách ktoré zároveň spĺňali podmienku strmého svahu.

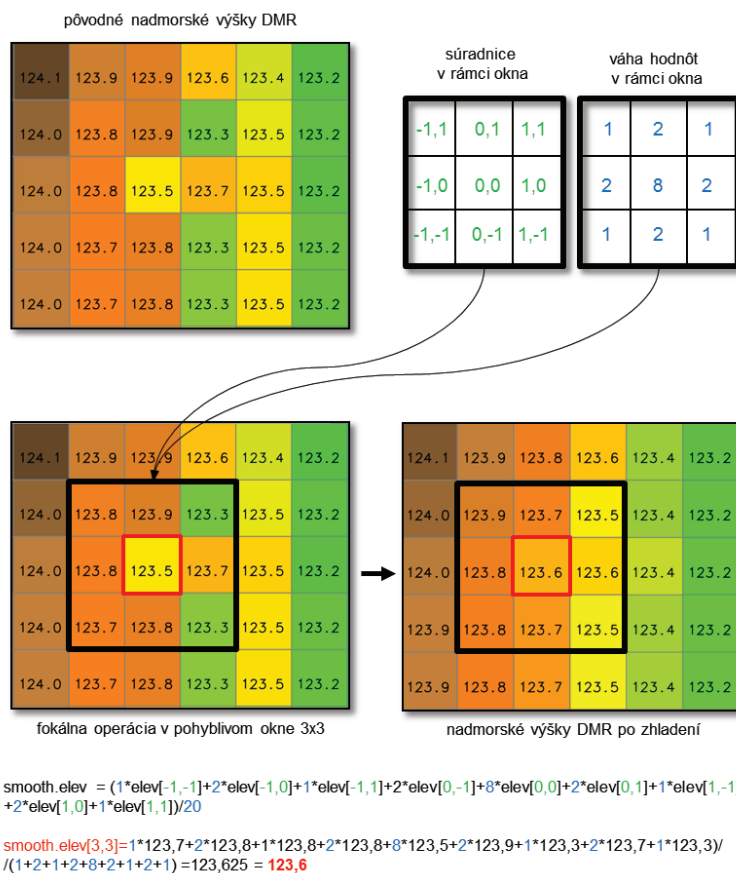
Pri fokálnej realizácii je hodnota výslednej bunky určená kombináciou hodnôt buniek nielen vo vertikálnom smere, ale aj hodnotami buniek v jej blízkom okolí (3x3, 5x5 a pod.). Príkladom fokálnej realizácie môže byť príkaz na vyhladenie digitálneho modelu reliéfu v tomto tvare:

$$\text{smooth.elev} = (\text{elev}[-1,-1] + 2 * \text{elev}[-1,0] + \text{elev}[-1,1] + 2 * \text{elev}[0,-1] + 8 * \text{elev}[0,0] + 2 * \text{elev}[0,1] + \text{elev}[1,-1] + 2 * \text{elev}[1,0] + \text{elev}[1,1])/20 \quad (5.7)$$

Schematicky túto operáciu znázorňuje obr. 5.7. S fokálnou realizáciou mapovej algebry úzko súvisia tzv. susedské analýzy na rastroch, ktoré určujú hodnotu v danom bode na základe hodnôt susedných buniek v presne definovanom okolí danej bunky. Okolie je definované počtom okolitých buniek (napr. 3x3, 5x5, atď.). Na základe hodnôt buniek z tohto okolia sa vypočíta nová hodnota v pôvodnej bunke. Najčastejšie sa k tomu používajú základné štatistické operácie ako sú priemer, medián, modus, minimum, maximum, smerodajná odchýlka, diverzita (počet odlišných hodnôt buniek v okolí) a podobne.

Pri zonálnej realizácii prebieha výpočet v určitej zóne definovanej ďalším, tzv. zonálnym rastrom, ktorý definuje oblasť, pre ktorú sa majú vypočítať štatistiky analyzovaného rastu. Používajú sa teda len dve rastrové vrstvy. Príkladom aplikácie zonálnej mapovej algebry môže byť výpočet indexov krajinných metrik (napríklad indexu diverzity) pre určité typy (regióny) krajiny.

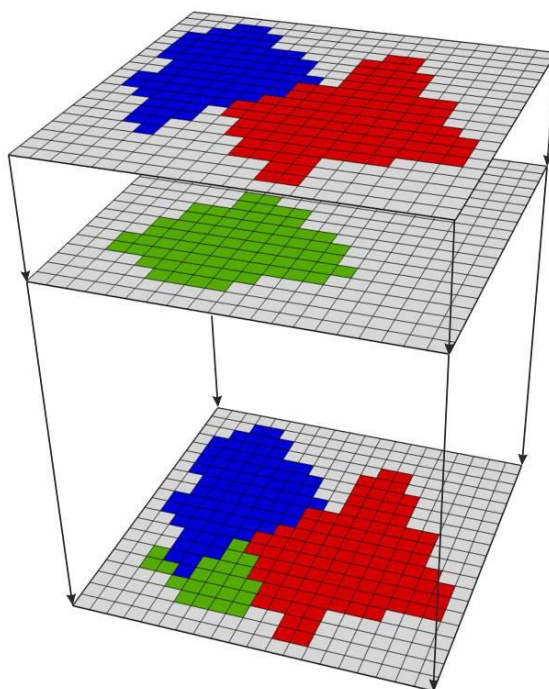
Inkrementálna realizácia prebieha globálne na celom rastroch, avšak často iteratčným spôsobom. Hodnota výslednej bunky je podobne ako pri fokálnych operáciách výsledkom okolia, ktoré však môže mať rozličný rozsah, v závislosti od prechádzajúceho stavu simulácie. Typickým príkladom aplikácie inkrementálnej mapovej algebry je modelovanie odtoku vody po povrchu reliéfu definovanom digitálnym modelom reliéfu.



Obr. 5.7: Aplikácia fokálnej operácie vyhladenia DMR váženým priemerom v pohyblivom okne 3x3 na príklade bunky v 3. riadku z 3. stĺpca zľava.

Pri tejto operácii sa globálne aplikuje vzorec na inkrementálne zmeny v pohybe vody medzi jednotlivými bunkami podľa veľkosti a smeru gradientu nadmorskej výšky, ktorý definuje smer a rýchlosť pohybu hmoty. Do tejto kategórie aplikácie mapovej algebry patria aj bunkové automaty (*cellular automata*), ktoré využívajú rastrovú dátovú štruktúru. Iniciálny stav buniek sa iteratívnym procesom mení na základe matematických pravidiel a vplyvu okolia. Výsledkom je nový stav buniek, na ktorý sa opäť aplikuje pravidlo zmeny stavu bunky. Bunkové automaty sa v geografii využívajú napríklad v modelovaní rastu miest, či v simulácii šírenia látok po zemskom povrchu.

Existuje aj špecifický prípad mapovej algebry, keď nejde o vzájomnú kombináciu dátových vrstiev, ale o vkladanie/doplňovanie dát do tých buniek rastra, ktoré nemajú žiadnu hodnotu (obr. 5.8). Ďalej existuje celý rad veľmi zaujímavých a užitočných analytických operácií s rastrovými dátami. Okrem najčastejšie používaných ako sú štatistické analýzy, reklasifikácie, tvorba zón, mapová algebra tu patria analýzy susedstva, analýzy nákladov, operácie s rastrovým digitálnym modelom reliéfu (napr. vyplňovanie depresí, konštrukcia spádnic a morfológických parametrov). Náročnejšie aplikácie obsahujú prvky modelovania (napr. slnečného žiarenia, povrchového tečenia vody a sedimentov, alebo aj iných krajinnoeekologických procesov). Medzi transformácie dát GIS patrí aj priestorová interpolácia. Jej cieľom je stanoviť hodnotu skúmaného javu v priestore, kde nie sú merania alebo vstupné dáta.



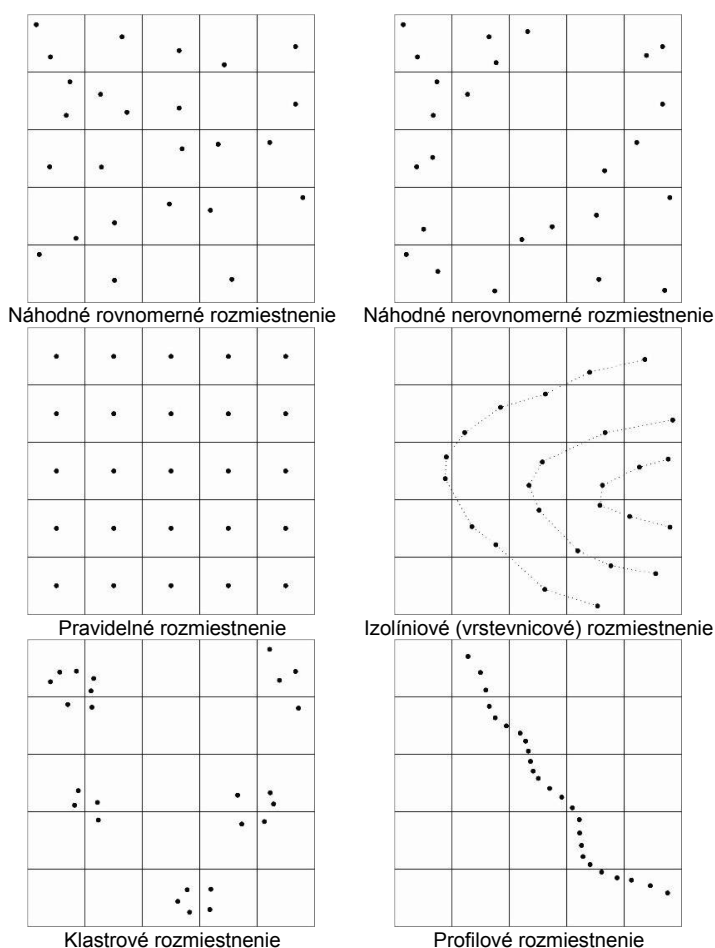
Obr. 5.8 Operácia vkladania rastrových vrstiev (spracované podľa Neteler a Mitasova, 2004).

5.3 Analýza distribúcie geopriestorových dát

Distribúcia geopriestorových dát (tzv. *sampling*) môže výrazne ovplyvňovať geopriestorové analýzy. Z tohto dôvodu je dôležité vykonať analýzu rozmiestnenia dát. Skúsení priestoroví analytici takúto analýzu vykonávajú na základe kvalifikovaného hodnotenia distribúcie dát. Znamená to, že si detailne prezrú rozmiestnenie dát v celom rozsahu a na základe odborných skúseností zvolia ďalší postup. Existuje však aj široká paleta exaktných analýz, ktorých cieľom je skúmať distribúciu dát v priestore. Jedným z analytických prístupov je skúmanie dát a hľadanie podobnosti so vzormi priestorovej distribúcie dát (*spatial point patterns*). Pre analýzu bodových záznamov existuje široká paleta metód, ktoré by sme mohli rozdeliť do dvoch skupín prístupov. Do prvej skupiny je možné zaradiť analýzy, ktoré sa zaoberajú intenzitou (veľkosťou) skúmaného javu, ich výsledkom je priemerný počet zložiek

na plochu v danej priestorovej jednotke. Do druhej skupiny patria metódy hodnotiace priestorovú závislosť, pričom sa hodnotia vzťah medzi jednotlivými zložkami v priestorovej jednotke, čím môžeme analyzovať štruktúru sledovaných jednotiek podľa podobnosti so vzormi priestorovej distribúcie dát. Rozdelenie týchto prístupov je účelové, nakoľko pri hodnotení distribúcie dát v priestore hodnotíme spravidla oba aspekty (intenzitu aj štruktúru javu).

Dobrovolný (2010), rozlišuje niekoľko vzorov priestorovej distribúcie dát, ktoré sú znázornené na obr.5.9.



Obr. 5.9 Znáznornenie vybraných vzorov priestorovej distribúcie dát

Analýzu priestorovej distribúcie dát začíname vizuálnym hodnotením. Následne je možné vykonať vybrané výpočtové procesy s popisnými mierami. Najčastejšie používanými charakteristikami, ktorými hodnotíme distribúciu dát v priestore sú:

1. Centricita (priemerný stred) – táto miera indikuje centrálnu tendenciu bodov a vyjadrujeme ju vzťahom

$$s(x, y) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right) \quad (5.8)$$

Pomocou tejto miery je možné analyzovať, či dáta sú rovnomerne vzdialené od stredu rozsahu dát. Pri globálnych analýzach, ktoré sa vzťahujú na celú dátovú množinu je interpretácia veľmi ťažká, preto sa odporúča aplikovať tento postup na menšie časti dátového súboru a vykonať tzv. lokálne analýzy.

2. Štandardná vzdialenosť od stredu – táto miera indikuje rozptyl bodov okolo priemerného stredu a vypočítame ju pomocou nasledujúceho vzťahu:

$$d_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2}{n}} \quad (5.9)$$

Táto miera hovorí o tom, aká priemerná vzdialenosť od priemerného stredu. Znázorňuje sa kružnicou. Aj v tomto prípade platí, že lokálna štatistika sa interpretuje ľahšie, nakoľko je možné porovnať rozmiestnenie dát v rámci jedného datasetu a tak ľahšie odhaliť vzory priestorovej distribúcie dát na menších častiach.

5.4 Priestorová autokorelácia

Jedným z najdôležitejších pojmov, na ktorých sú založené rôzne priestorové analýzy a modely, je priestorová autokorelácia. Ide o koncepciu založenú na spojitých fyzikálnych poliach. V geografii je princíp nazerania na hodnoty spojitých fyzikálnych polí známy ako prvý zákon geografie, ktorý popísal Tobler v roku 1970. Tobler (1970) uvádza, že „všetko spolu súvisí, ale objekty, ktoré sú k sebe bližšie spolu súvisia viac, ako objekty od seba viac vzdialené“. V štatistickej terminológii hovoríme, že niektoré javy vykazujú priestorovú autokoreláciu. Na druhej strane, pokiaľ sú údaje v priestore lokalizované tak, že geograficky blízke hodnoty nie sú v žiadnom vzťahu, analyzované javy hodnotíme ako štatisticky bezvýznamné. Priestorová autokorelácia môže byť definovaná ako prítomnosť priestorovej štruktúry mapovaných premenných vzhľadom na ich geografickú blízkosť. Ide o špecifický typ korelácie, kde sa hodnotí vzťah jednej premennej v priestore a čase. Kľúčovým aspektom analýzy geopriestorových dát je hľadanie priestorových vzorcov. Pojem priestorová závislosť sa vzťahuje na závislosť hodnôt na ostatné susedné hodnoty. Inými slovami by sme mohli povedať, že hodnoty nachádzajúce sa v menších vzdialenostiach sú si podobnejšie a tento vzťah sa s narastajúcou vzdialenosťou vytráca. Tento princíp je kľúčovým konceptom v geografii ako aj pri modelovaní priestorových javov. Ide vlastne o mieru, podľa ktorej premenná je korelovaná na základe priestorových vzdialeností sama sebou. Miera priestorovej autokorelácie môže vyjadrovať priestorovú závislosť (ak susediace hodnoty sú podobné, ide o pozitívnu závislosť), alebo priestorovú nezávislosť, (susediace hodnoty sú rozdielne, ide o negatívnu priestorovú autokoreláciu). Priestorová autokorelácia sa vyjadruje viacerými spôsobmi. Najčastejšie sa používa Moranov koeficient a Gearyho koeficient.

Moranov koeficient

Mieru priestorovej autokorelácie je možné vyjadriť pomocou Moranovho koeficientu I , pre ktorý platí:

$$I = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2) (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij})} \quad (5.10)$$

kde

n – počet priestorových jednotiek;

y_i – hodnota skúmaného javu v priestorovej jednotke i , pričom $i = 1, 2, 3, \dots, n$;

y_j – hodnota skúmaného javu v priestorovej jednotke j , pričom $j = 1, 2, 3, \dots, n$;

$\bar{y}$ – priemerná hodnota skúmaného znaku;

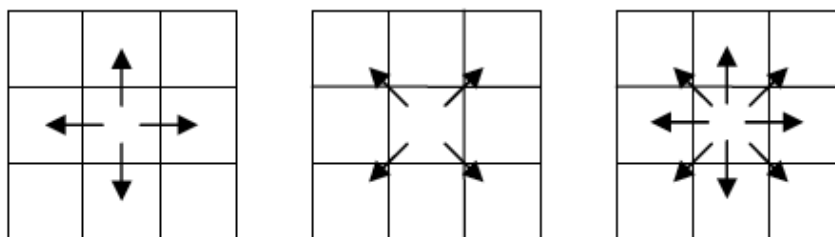
w_{ij} – váha pre priestorovú jednotku i a j .

Uvedený vzťah pre vyjadrenie hodnoty I zahŕňa dvojité sumy $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$. Pre vysvetlenie uvádzame, že výpočet týchto súm sa začína pre hodnotu $i=1$ a $j=1$ a pokračuje $i=1$ a $j=2$, ďalej $i=1$ a $j=3$ až do $i=1$ a $j=n$. Tento výpočet bude ďalej prebiehať $i=2$ a $j=1$, $i=2$ a $j=2$ až $i=2$ a $j=n$, a pokračuje, kým sa

nevyčerpajú všetky kombinácie hodnôt priestorových jednotiek i a j , čo by sme mohli formálne zapísať výrazom $i=n$ a $j=n$. V každom kroku sa do výpočtu pridáva hodnota získaná z predošlého výpočtu. V tomto prípade sú všetky kombinácie i a j zahrnuté do výsledku.

$$n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y}) \quad (5.11)$$

Jedným z parametrov, ktoré vstupuje do výpočtu je w_{ij} – váha pre priestorovú jednotku. Váhu priestorových jednotiek je možné vyjadriť viacerými spôsobmi, napr. pomocou metódy inverzných vzdialeností so stanovením vzdialenosti, fixných vzdialeností, alebo na základe definovaných kritérií. Pre jednoduchšie vysvetlenie demonštrujeme analýzu priestorovej autokorelácie pomocou Moranovho koeficientu podľa váženého hodnôt na základe fixnej vzdialenosti. V tomto môžu váhy pre priestorové jednotky nadobúdať hodnoty 0 a 1. Hodnota 0 znamená, že priestorová jednotka sa nezahŕňa do výpočtu, 1 – znamená, že daná priestorová jednotka má vplyv na výslednú hodnotu. V tomto výpočte váha slúži na to, aby sa selektovali tie priestorové jednotky, ktoré chceme sledovať. Pre ich selekciu sa využívajú tri prístupy, ktoré sú podobné, ako ťahy figúrkami dámy (*queen*), veže (*rook*) a strelca (*bishop*) na šachovnici, preto dostali aj podobné pomenovania (obr. 5.10).



Obr. 5.10 Priestorová štruktúra váh typu a) rook, b) bishop a c) queen.

Výsledná hodnota Moranovho koeficientu I indikuje, že ak I dosahuje záporné hodnoty, ide o negatívnu priestorovú autokoreláciu, čo znamená, že susedné hodnoty majú tendenciu byť rozdielne. Kladné hodnoty I indikujú, že ide o pozitívnu priestorovú autokoreláciu, čo znamená, že susediace hodnoty majú tendenciu byť podobné. Hodnoty I pochybujúce sa okolo 0 indikujú, že nie je identifikovateľná údajová štruktúra.

Pre výpočet Moranovho koeficientu je v súčasnosti k dispozícii viacero aplikácií, ktoré sú implementované či už do GIS-u (napr. ArcGIS – Spatial Statistics toolbox – Global Moran's I; SAGA – Geostatistics – Grids - Global Moran's I), alebo sú súčasťou rôznych štatistických programov (napr. moduly implementované v programoch R, GeoDa). V každom programe sú isté špecifiká pre výpočet Moranovho koeficientu. Väčšina programov počíta globálnu hodnotu Moranovho koeficientu, avšak je možné počítať aj lokálnu hodnotu Moranovho koeficientu pre definovanú oblasť.

Výpočet Moranovho koeficientu I demonštrujeme na jednoduchšej matici hodnôt, ktorá nech má nasledujúcu štruktúru dát.

7	8	11
11	9	10
11	12	9

Maticu hodnôt rozložíme na nasledujúce kombinácie (pre tvorbu kombinácii sme použili princíp v smere hodinových ručičiek), pre ktoré robíme čiastkové výpočty. Pre ukážku volíme w_{ij} – **váhu pre priestorovú jednotku typu queen**. To znamená, že vytvárame kombinácie čísel so susednými hodnotami vo všetkých smeroch. Podrobný postup je uvedený v tab. 5.1.

y_i	y_j	$\bar{y}$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_j - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})$
7	8	9,778	-2,778	-1,778	4,938
7	9	9,778	-2,778	-0,778	2,160
7	11	9,778	-2,778	1,222	-3,395
8	11	9,778	-1,778	1,222	-2,173
8	10	9,778	-1,778	0,222	-0,395
8	9	9,778	-1,778	-0,778	1,383
8	11	9,778	-1,778	1,222	-2,173
8	7	9,778	-1,778	-2,778	4,938
11	10	9,778	1,222	0,222	0,272
11	9	9,778	1,222	-0,778	-0,951
11	8	9,778	1,222	-1,778	-2,173
11	7	9,778	1,222	-2,778	-3,395
11	8	9,778	1,222	-1,778	-2,173
11	9	9,778	1,222	-0,778	-0,951
11	12	9,778	1,222	2,222	2,716
11	11	9,778	1,222	1,222	1,494
9	8	9,778	-0,778	-1,778	1,383
9	11	9,778	-0,778	1,222	-0,951
9	10	9,778	-0,778	0,222	-0,173
9	9	9,778	-0,778	-0,778	0,605
9	12	9,778	-0,778	2,222	-1,728
9	11	9,778	-0,778	1,222	-0,951
9	11	9,778	-0,778	1,222	-0,951
9	7	9,778	-0,778	-2,778	2,160
10	11	9,778	0,222	1,222	0,272
10	9	9,778	0,222	-0,778	-0,173
10	12	9,778	0,222	2,222	0,494
10	9	9,778	0,222	-0,778	-0,173
10	8	9,778	0,222	-1,778	-0,395
11	9	9,778	1,222	-0,778	-0,951
11	12	9,778	1,222	2,222	2,716
11	11	9,778	1,222	1,222	1,494
12	9	9,778	2,222	-0,778	-1,728
12	10	9,778	2,222	0,222	0,494
12	9	9,778	2,222	-0,778	-1,728
12	11	9,778	2,222	1,222	2,716
12	11	9,778	2,222	1,222	2,716
9	10	9,778	-0,778	0,222	-0,173
9	12	9,778	-0,778	2,222	-1,728
9	9	9,778	-0,778	-0,778	0,605

Tab. 5.1 Kombinácie čísel vo všetkých smeroch

Do výsledného výpočtu vstupujú aj ďalšie premenné, ktorých spôsob výpočtu s čiastkovými výsledkami je uvedený v tab. 5.2

y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
7	-2,778	7,716
8	-1,778	3,160
11	1,222	1,494
11	1,222	1,494
9	-0,778	0,605
10	0,222	0,049
11	1,222	1,494
12	2,222	4,938
9	-0,778	0,605

Tab. 5.2 Dopĺňujúce výpočty pre určenie Moranovho koeficientu I

pričom,

n (počet priestorových jednotiek) = 9;

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$ (počet všetkých kombinácií priestorových jednotiek) = 40;

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y}) = 3,975$;

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 21,556$.

Po dosadení hodnôt do vzorca

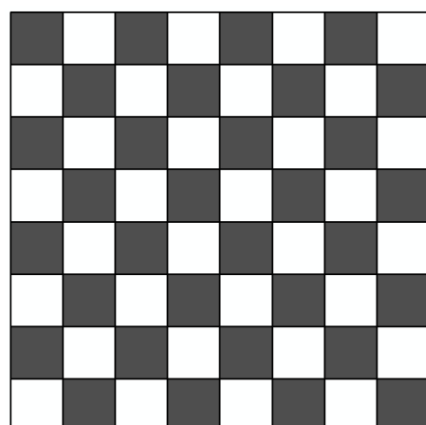
$$I = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2) (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij})} \quad (5.12)$$

dostaneme tvar

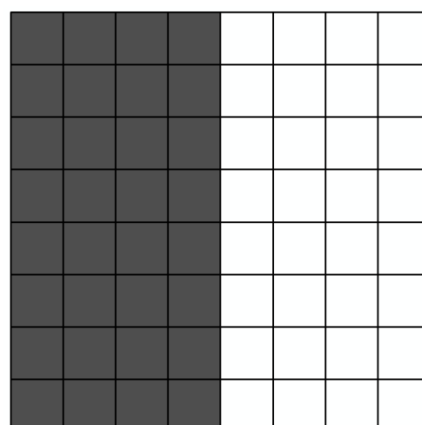
$$I = \frac{9 * 3,975}{21,556 * 40} = 0,041 \quad (5.13)$$

Výsledok by sme mohli interpretovať, že ide o hodnotu blízko 0, čo znamená, že susediace hodnoty na uvedenom príklade majú tendenciu byť si nepodobné, majú charakter náhodne distribuovaných hodnôt v priestore.

Pre lepšie pochopenie uvádzame nasledujúce ukážky dátových matíc s rôznou priestorovou štruktúrou dát ako aj s uvedenými hodnotami Moranovho koeficientu I vyjadrujúcu mieru priestorovej autokorelácie upravenú podľa Lloyd (2010 – obr. 5.11 a 5.12)



Negatívna priestorová autokorelácia
 $I = -1,000$



Pozitívna priestorová autokorelácia
 $I = 0,865$

Obr. 5.11 Čierne bunky reprezentujú hodnoty 1, biele bunky reprezentujú hodnoty 0. Pre váženie hodnôt bol použitý prístup Rook.



42	38	44	42	43	44	44	45
39	42	42	41	35	34	42	43
39	41	42	38	35	34	32	38
39	41	42	39	38	37	41	39
41	37	38	39	31	35	41	32
42	43	44	41	33	28	29	29
41	39	37	41	39	37	36	34
42	36	41	39	36	36	37	35

Obr. 5.12 Rastrová reprezentácia matice hodnôt vyjadrená:

A: odtieňmi šedej farby

kde Moranov koeficient má hodnotu v prípade

Rook prístupu $I = 0,505$

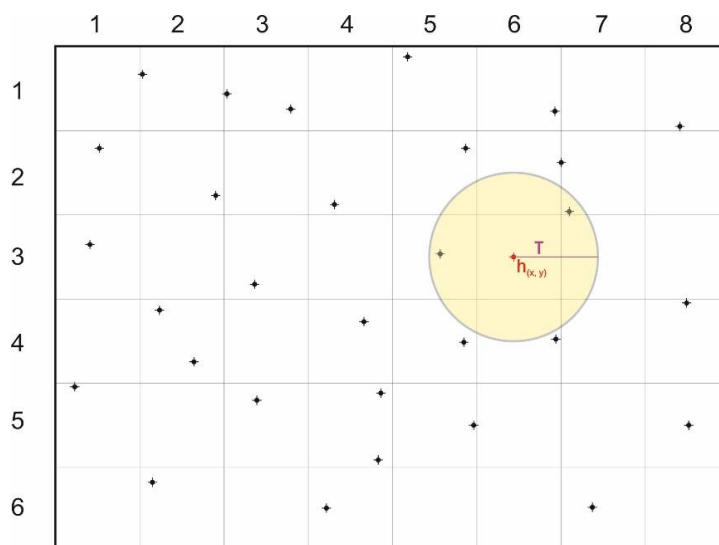
Queen prístup $I = 0,400$

B: numerickými hodnotami,

5.5 Jadrové analýzy hustoty

Jadrové analýzy hustoty (*kernel density estimation*) je pomerne sofistikovaná metóda, pomocou ktorej je možné skúmať priestorové rozdiely v hustote výskytu javu. Aby sme dodržali koncepciu týchto učebných textov, najskôr začneme vysvetlením jednoduchých analýz a postupne sa dopracujeme k sofistikovanejším metódam. Hustotu výskytu javu by sme mohli definovať ako podiel počtu výskytov javu na jednotku plochy. V prípade obyvateľstva sa často používa charakteristika hustoty zaľudnenia, ktorá vyjadruje počet obyvateľov na rozlohu administratívnej jednotky (štátu, kraja, okresu, a pod.). Tento prístup sa však nedá aplikovať na všetky geopriestorové javy (napr. kategorizáciu územia na základe morfometrickej charakteristiky relatívneho výškového prevýšenie územia, koncentrácia (hustota) vybraného odvetia hospodárstva, hodnotenie štruktúry obyvateľstva a pod.) V takom prípade je potrebné stanoviť si určité územie, pre ktoré budeme počítať hustotu javu. Takéto územie budeme označovať „sledovaná oblasť“ (*kernel* – jadro). Inými slovami by sme mohli povedať, že analýza hustoty je založená na hodnotení hustoty pre malé regióny (kernely).

Pre jednoduché určenie hustoty bodov reprezentujúcich sledovaný jav na určitom území je možné použiť postup, pri ktorom sa zvolí tvar a veľkosť sledovanej oblasti. Tvar sledovanej oblasti môže byť rôzny. Dokonca je možné uvažovať o rôznych tvaroch pre jeden dataset, v ktorom sú záznamy o výskyte sledovaného javu. Najčastejšie sa používa kruh, obdĺžnik, avšak je možné použiť aj komplikovanejšie geometrické tvary, napr. rôzno-tvaré polygóny, medzikružie, trojuholníky, atď. Veľkosť sledovanej oblasti sa definuje spravidla pomocou polomeru vyhľadávania (*bandwidth*). Veľkosť sledovanej oblasti môže byť taktiež variabilná. Stanoveniu optimálnej rozlohy sledovanej oblasti sa budeme venovať neskôr. Výsledné hodnoty hustoty sledovaného javu sú spravidla vyjadrené pomocou rastrovej dátovej reprezentácie. Postup analýzy hustoty sledovaného javu si vysvetlíme na príklade. Nech sú dané polohy bodov podľa obr. 5.13. Jednotlivé kroky výpočtu demonštrujeme pomocou obrázkov.



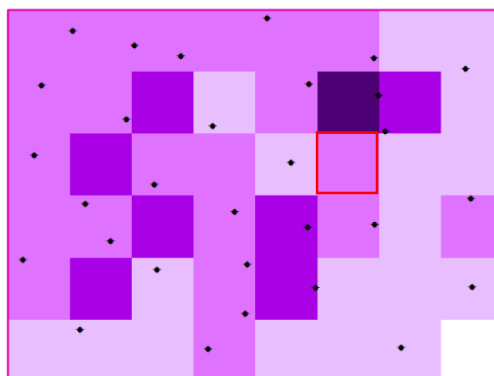
Obr. 5.13 Vstupné bodové pole (čierny body) s rastrom (štvorčeky) s veľkosťou 1m x1 m. Hustota bodov $h_{(x,y)}$ sa počíta pre stredy každej bunky rastra. Za sledovanú oblasť bol zvolený kruh s polomerom τ 1 m, čiže veľkosť plochy kruhu je $S_{(x,y)} = 3,14157 \text{ m}^2$. V našom prípade do sledovanej plochy zasahujú 2 body.

Prvým krokom je určenie počtu bodov v sledovanej oblasti. Pre demonštráciu analýzy hustoty sme si za tvar sledovanej oblasti zvolili kruh. V našom prípade teda najskôr určíme počet bodov spadajúcich do kruhu so stredom kruhu v strede bunky rastra. Uvedený postup sa zopakuje pre všetky bunky rastra a výsledok sa zapíše do matice hodnôt. (obr. 5.14)

A

```
ncols      8
nrows      6
xllcorner  0
yllcorner  0
cellsize    1
NODATA_value -9999
2 2 2 2 2 2 1 1
2 2 3 1 2 4 3 1
2 3 2 2 1 2 1 1
2 2 3 2 3 2 1 2
2 3 1 2 3 1 1 1
1 1 1 2 1 1 1 0
```

B



Obr. 5.14 Zázpis počtu bodov spadajúcich do sledovanej oblasti vymedzenej kruhom vyjadrený A. maticou hodnôt pre bunku rastra a B. grafickým znázornením rastra (farby reprezentujú hodnotu bunky, čo je počet výskytov, kde biela = 0, svetlofialová = 1 až tmavofialová = 4). Červenou kružnicou a štvorcikom je zvýraznená bunka, na ktorej sme demonštrovali ukážku určenia počtu bodov v rámci sledovanej oblasti podľa obr. 5.13.

Ďalším krokom je výpočet hustoty bodov pre sledovanú oblasť. Hustota bodov zapísaná v bunke rastra sa vydělí veľkosťou plochy sledovanej oblasti $S_{(x,y)}$. (obr. 5.15) Uvedený postup je možné zapísať nasledovne:

$$h_{(x,y)} = \frac{n_{S_{(x,y)}}}{S_{(x,y)}} \quad (5.14)$$

kde

$h_{(x,y)}$ – hustota javu so súradnicami x a y

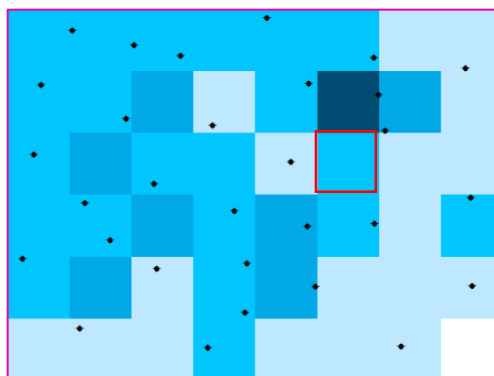
$n_{S_{(x,y)}}$ - počet bodov v sledovanej ploche

$S_{(x,y)}$ - rozloha sledovanej oblasti

A

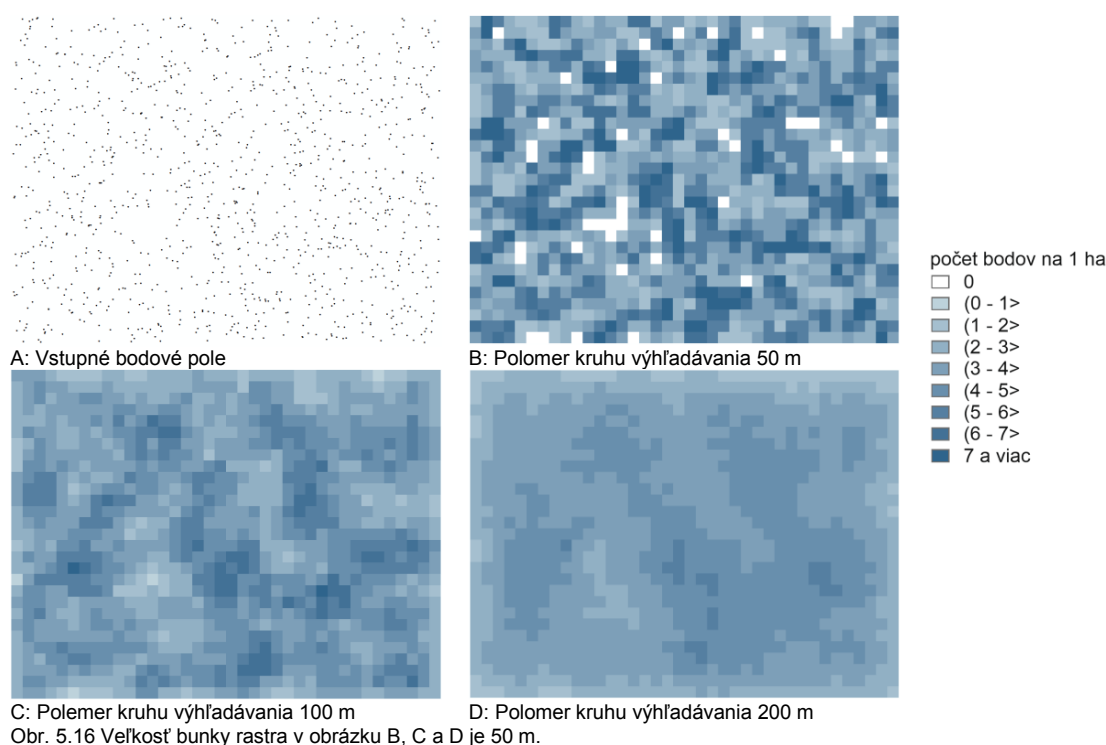
```
ncols      8
nrows      6
xllcorner  0
yllcorner  0
cellsize   1
NODATA_value -9999
0,64 0,64 0,64 0,64 0,64 0,32 0,32
0,64 0,64 0,95 0,32 0,64 1,27 0,95 0,32
0,64 0,95 0,64 0,64 0,32 0,64 0,32 0,32
0,64 0,64 0,95 0,64 0,95 0,64 0,32 0,64
0,64 0,95 0,32 0,64 0,95 0,32 0,32 0,32
0,32 0,32 0,32 0,64 0,32 0,32 0,32 0
```

B



Obr. 5.15 Zápis hodnôt vypočítanej hustoty bodov na základe sledovanej oblasti vymedzenej kruhom $S_{(x,y)}$ vyjadrený (A.) maticou hodnôt pre bunku rastra a (B.) grafickým znázorním rastra (farby reprezentujú hodnotu bunky – biela = 0, svetlomodrá = 0,32 až tmavomodrá = 1,27). Červenou kružnicou a štvorcem je zvýraznená bunka, na ktorej sme demonštrovali ukážku určenia počtu bodov v rámci sledovanej oblasti podľa obr. 5.13.

Výsledné hodnoty interpretujeme ako počet bodov na jednotku plochy (napr. m^2 , ha, km^2) pre sledovanú oblasť vyhľadávania v definovanom tvare a veľkosti. V našom prípade by sme mohli povedať, že hustota bodov pre bunku ohraničenú červenou farbou na obrázku je 0,64 bodu na $1 m^2$ so sledovanou oblasťou vyhľadávania bodov v tvare kruhu s polomerom 1 m. Čím bude plocha sledovanej oblasti vyhľadávania rozľahlejšia (polomer kruhu bude väčší), tým je výsledný povrch hladší. Naopak, čím je plocha sledovanej oblasti menšia (polomer kruhu menší), tým sú viac viditeľné zhluky (klastre) výskytov sledovaného javu. (obr. 5.16)



Na základe uvedeného postupu je možné vypočítať hustotu javu na jednotku plochy, avšak nevýhodou tejto metódy je, že nezohľadňuje intenzitu (veľkosť) sledovaného javu, iba počet jeho výskytov. Aby bolo možné zohľadniť intenzitu sledovaného javu, je zavedený parameter, ktorý sa vo väčšine GIS-ov označuje ako „population parameter“ p_i . Ak by napríklad vstupné bodové pole reprezentovalo sídla, pomocou uvedeného postupu by sme vypočítali iba hustotu sídel na jednotku plochy, avšak nezohľadňovali by sme počet obyvateľov v jednotlivých sídlach.

Population parameter je možné vyjadriť pomocou vzťahu:

$$h_{(x,y)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{S_{(x,y)}} \quad (5.15)$$

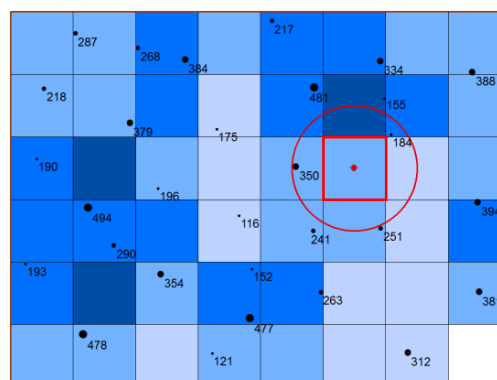
kde

p_i – je „population parameter“

A

```
ncols      8
nrows      6
xllcorner  0
yllcorner  0
cellsize   1
NODATA_value -9999
160,75 176,66 207,54 191,30 222,18 259,42 106,32 123,50
129,87 190,03 298,57 55,70 264,52 367,33 214,22 123,50
217,72 340,27 183,03 92,63 111,41 169,99 58,57 125,41
218,68 249,55 267,38 85,31 162,02 156,61 79,90 246,69
213,59 357,14 112,68 200,22 283,93 83,72 99,31 121,28
152,15 152,15 38,52 190,35 151,83 99,31 99,31 0,00
```

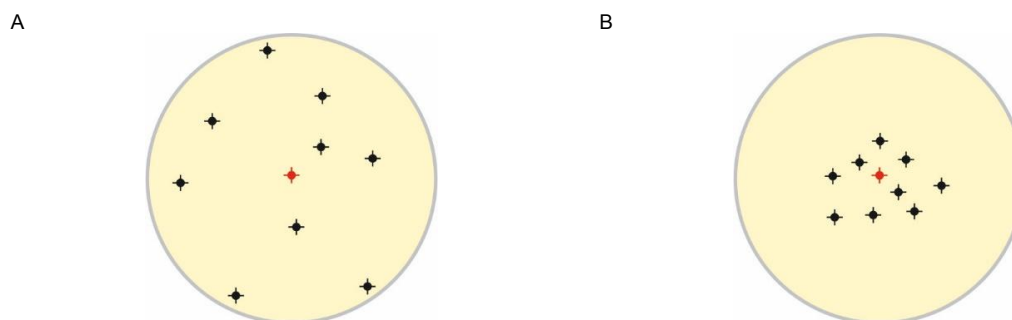
B



Obr. 5.17 Zápis hodnôt vypočítanej hustoty bodov na základe sledovanej oblasti vymedzenej kruhom $S_{(x,y)}$ vyjadrený (A.) maticou hodnôt pre bunku rastra a (B.) grafickým znázornením rastra (farby reprezentujú intervaly hodnôt – biela=0, svetlomodrý = do 100 až tmavomodrá = (300 – 400>). Červenou kružnicou a štvorcom je zvýraznená bunka, na ktorej sme demonštrovali ukážku určenia počtu bodov v rámci sledovanej oblasti podľa obr. 5.13.

Výsledok uvedený na obr. 5.17 interpretujeme ako počet jednotiek vyjadrených pomocou „population parameter“ na jednotku plochy. V našom prípade nech „population parameter“ reprezentuje počet obyvateľov, čiže výsledok pre vybranú bunku interpretujeme ako 169,98 obyvateľov na 1 m² so sledovanou oblasťou vyhľadávania bodov v tvare kruhu s polomerom 1 m.

Aj táto metóda má isté obmedzenia, ktoré súvisia s tým, že všetky hodnoty, ktoré spadajú do sledovanej oblasti sú si rovnocenné, bez ohľadu na ich polohu v rámci sledovanej oblasti. (obr. 5.18)



Obr. 5.18 Rozmiestnenie bodov (čierne bodové značky) v rámci sledovanej oblasti (svetložltý kruh ohraničený sivou líniou) so stredom kernelu (červená bodová značka), ktoré sú (A.) distribuované rovnomerne v celej sledovanej oblasti a (B.) koncentrované okolo stredu sledovanej oblasti.

Výpočet hustoty je možné rozšíriť o ďalší parameter, ktorý súvisí s tzv. geografickou váhou, alebo váhou vzdialenosti, ktorá sa použije ako koeficient na výpočet hodnôt. Použitie koeficientu na vyjadrenie váhy hodnoty na základe vzdialenosti je založený na rovnakom koncepte ako priestorová autokorelácia. Predpokladáme, že lokality, ktoré sú k sebe bližšie, sú si viac podobné hodnotou ako vzdialenejšie lokality. Ide len o to, akým spôsobom vyjadriť váhu hodnôt na základe vzdialenosti. Vo všeobecnosti pre určenie hodnoty platí nasledujúci vzťah:

$$h_{(x,y)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \quad (5.16)$$

pričom

λ_i – je váhový parameter.

a všeobecný vzťah pre určenie váhy platí je možné zapísať vzťahom:

$$\lambda_k(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau^2} k\left(\frac{x - x_i}{\tau}\right) \quad (5.17)$$

kde

$\lambda_k(x)$ – (čítaj „lamda“) je váha, pre určenie hodnoty k v bode x , ktorý predstavuje polohu bodu (spravidla poloha v strede rastra), ku ktorej sa vzťahuje výpočet a ktorý tvorí zároveň stred sledovanej oblasti.

τ – (čítaj tau) je polomer vyhľadávania (bandwidth) sledovanej oblasti

$(x - x_i)$ – je vzdialenosť bodu x_i od stredu sledovanej oblasti x .

Takýmto spôsobom je zabezpečené, aby hodnoty, ktoré sú bližšie k stredu sledovanej oblasti mali väčšiu váhu ako vzdialenejšie hodnoty. Existuje však široká paleta rozličných prístupov ku tvorbe tzv. kernelu pre váženie. Najčastejšie sa používa bikvadratická funkcia (quartic function, resp. polynomická

funkcia 4. rádu), ktorej princíp si vysvetlíme na nasledujúcom príklade. Pre sledovanú oblasť (kernel) s tvarom kruhu platí nasledujúci vzťah:

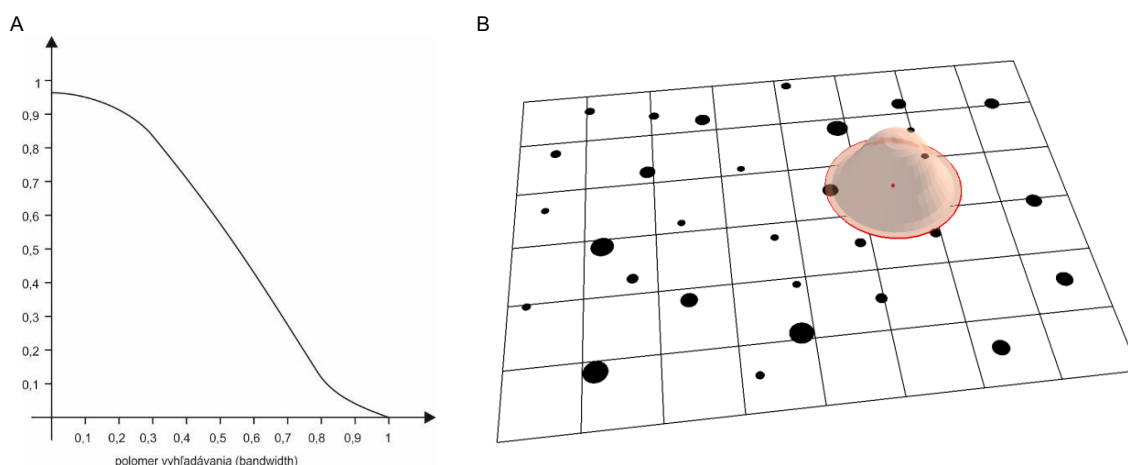
$$\lambda_k(x) = \sum_{d_i \leq \tau} \frac{3}{\pi \tau^2} \left(1 - \frac{d_i^2}{\tau^2}\right)^2 \quad (5.18)$$

kde

d_i – je $(x - x_i)$, je vzdialenosť bodu x_i od stredu sledovanej oblasti (kernelu) x .

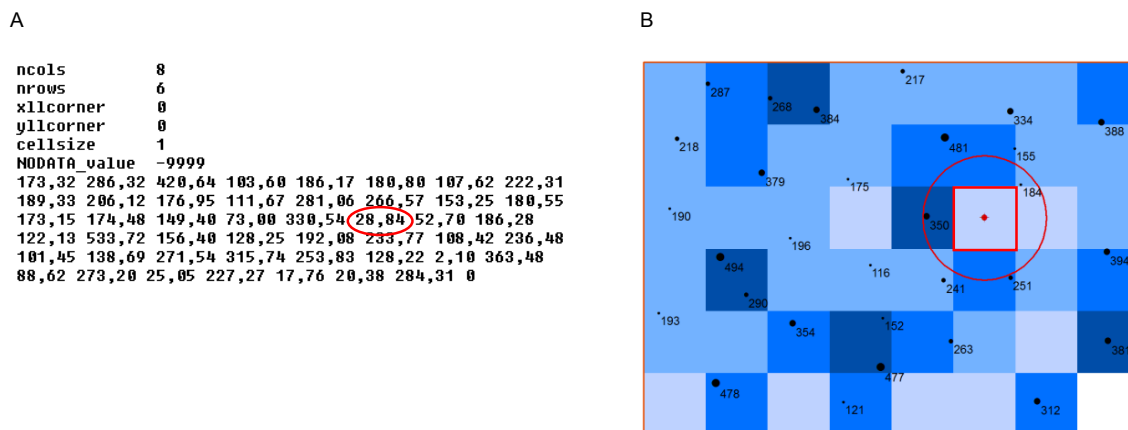
Odvozenie tejto funkcie je uvedené v práci Bailey a Gatrell (1995).

Určenie váhy pre hodnoty nachádzajúce sa v sledovanej oblasti je demonštrovaný na obr. 5.19.



Obr. 5.19 Určenie váhy pre hodnoty v sledovanej oblasti podľa bikvadratickej funkcie (polynóm 4. rádu). Na obrázku je znázornená polynomickej funkcie 4. rádu v podobe (A) profilu a (B) „zvona“ v 3D priestore. „Zvon“ má symbolizovať rozloženie váh v sledovanej oblasti so stredom v červenom bode (kde je zároveň vrchol „zvona“). Čierne kruhy reprezentujú výskyt sledovaného javu, „population parameter“ je vyjadrený rôznou veľkosťou bodových značiek. Súradnice výskytu sledovaného javu sa vzťahujú pre stred bodových značiek.

Na základe uvedených vzťahov pre určenie hustoty sledovaného javu je možné vypočítať hodnoty pre všetky bunky rastra tak, že stred sledovanej oblasti sa postupne bude presúvať, až kým nie sú určené hodnoty pre všetky bunky rastra. Výpočet pre určenie hustoty sledovaného javu demonštrujeme na nasledujúcom príklade. Nech je dané vstupné bodové pole so sledovanou oblasťou v tvare kruhu a polomerom vyhľadávania 1 m. Poloha a hodnoty vstupného bodového poľa sú znázornené na obr. 5.20.



Obr. 5.20 Zápis hodnôt vypočítanej hustoty bodov na základe sledovanej oblasti vymezenej kruhom $S_{(x,y)}$ vyjadrený (A.) maticou hodnôt pre bunky rastra a (B.) grafickým znázornením rastra (farby reprezentujú intervaly hodnôt – biela = 0, svetlomodrý = do 100 až tmavomodrá = (300 – 554)). Červenou kružnicou a štvorcem je zvýraznená bunka, na ktorej sme demonštrujeme

ukážku určenia hustoty výskytu sledovaného javu na základe váhy hodnôt podľa vzdialenosti bodov pomocou polynomickej funkcie 4. rádu.

Súradnice bodu reprezentujúceho stred vyhľadávania, ako aj bodov s hodnotou 184 a 350 uvádzame kvôli prehľadnosti v tab. 5.3. Na základe súradníc bodov určíme vzdialenosť $d_i = (x - x_i)$.

		x	y	$d_{(x,x_1)} = \sqrt{(x_x - x_{x_i})^2 + (x_y - x_{y_i})^2}$
Stred vyhľadávania	x	5,5	3,5	0
Bod s hodnotou 184	x_1	4,569068	3,527496	0,799056
Bod s hodnotou 350	x_2	6,093071	4,035497	0,931338

Tab. 5.3 Určenie vzdialenosti pre body v rámci sledovanej oblasti.

Po zistení vzdialenosti medzi bodmi je možné vypočítať váhy pre určenie hodnoty podľa vzťahu

$$\lambda_k(x) = \sum_{d_i \leq \tau} \frac{3}{\pi \tau^2} \left(1 - \frac{d_i^2}{\tau^2}\right)^2 \quad (5.19)$$

teda, ak polomer vyhľadávania je 1m, potom dostaneme nasledujúce hodnoty, ktoré sú uvedené v tab. 5.4.

		$\frac{3}{\pi \tau^2}$	$\left(1 - \frac{d_i^2}{\tau^2}\right)^2$	$\lambda_k(x) = \frac{3}{\pi \tau^2} \left(1 - \frac{d_i^2}{\tau^2}\right)^2$
Bod s hodnotou 184	x_1	0,954937	0,130689	0,016793
Bod s hodnotou 350	x_2	0,954937	0,017585	0,01248

Tab. 5.4 Určenie váh pre hodnoty bodov v rámci sledovanej oblasti.

Po dosadení do rovnice

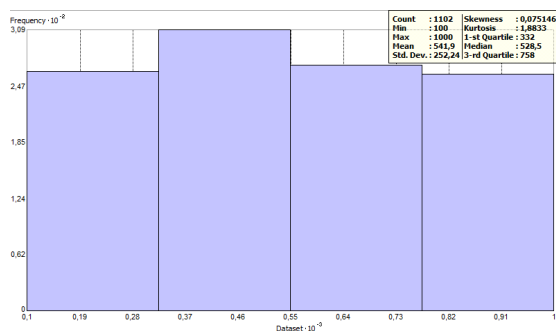
$$h_{(x,y)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \quad (5.20)$$

dostaneme výsledok

		λ_i	p_i	$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$
Bod s hodnotou 184	x_1	0,954937	184	22,9632
Bod s hodnotou 350	x_2	0,954937	350	5,877496
Σ				28,84069

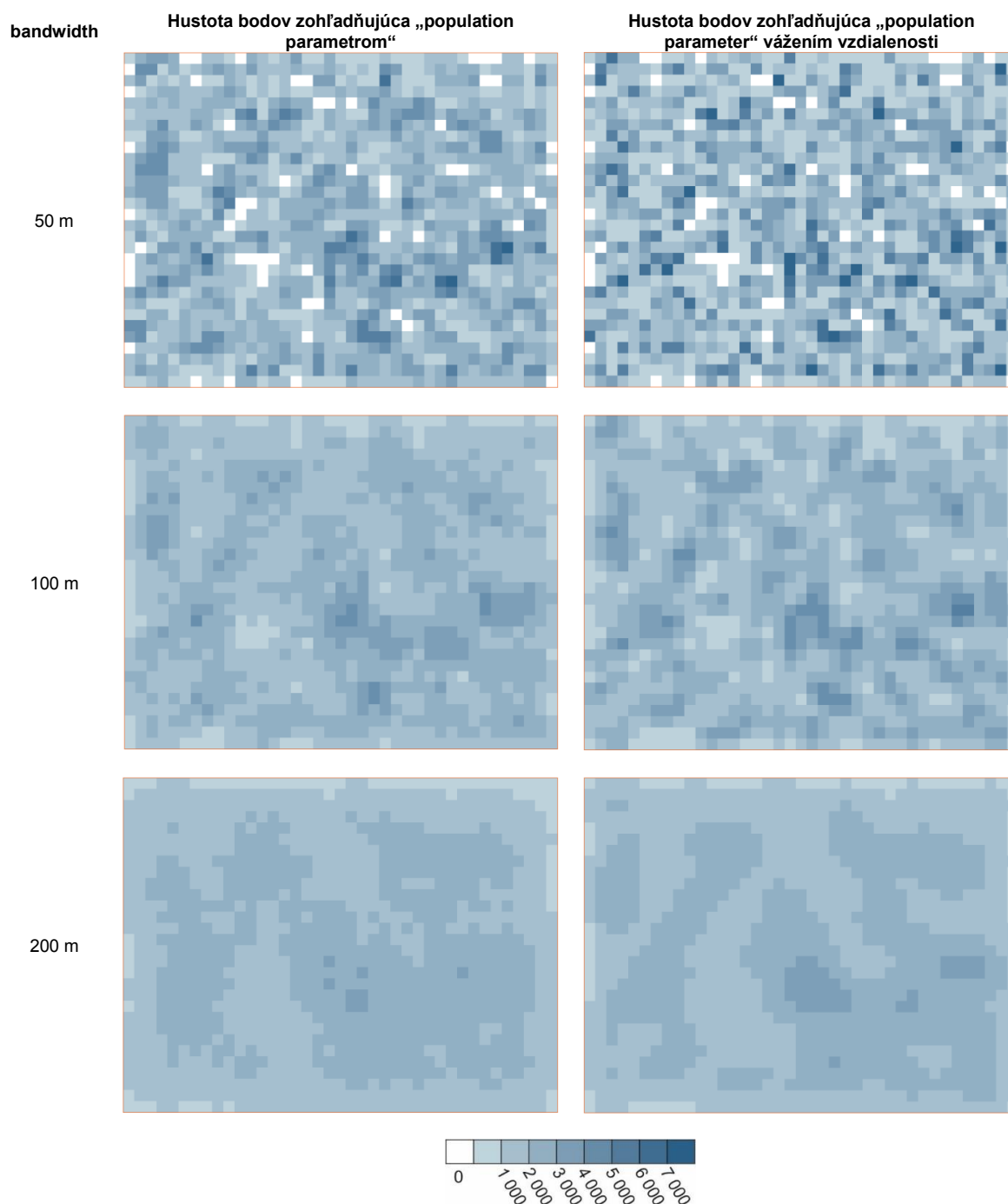
Tab. 5.5 Výsledný výpočet určený podľa vzťahu 5.20.

Výsledok výpočtov uvedených metód pre analýzu hustoty javu so zohľadnením „population parametra“ a váhou vzdialenosti je možné vizuálne porovnať na obr. 5.22. Výpočty boli realizované pre vstupné bodové pole (1102 bodov), ktorých hodnoty sa pochybujú v rozmedzí od 100 do 1000. Rozsah dát je v smere osi x 25 až 1975 m a v smere osi y 25 až -1475. (obr. 5.21)



Obr.5.21 Poloha vstupného bodového poľa. Vstupné bodové pole rozdelené na 4 intervaly. Základné štatistiky o vstupnom datasete sú uvedené v tabuľke v hornom rohu.

Uvedené dáta je potrebné vnímať ako testovaciu vzorku, pre ktorú boli súradnice bodov generované náhodne, zadaný bol iba rozsah polohy údajov a počet bodov. Hodnoty bodov „population parameter“ boli taktiež generované náhodne, pričom ako minimálna hraničná hodnota bola zadaná 100 a maximálna hraničná hodnota 1000. Veľkosť bunky rastra sme zvolili 50 m.



Obr. 5.22 Porovnanie metód pre analýzu hustoty javu

Z uvedených obrázkov je možné pozorovať, že vyjadrenie hustoty bodov zohľadňujúc váženie vzdialenosti od stredu záujmovej oblasti zvyčajne zdôrazňuje zhľady resp. miesta, kde dochádza ku koncentrácii hodnôt sledovaného javu. Jedným z príkladov použitia tejto metódy je aj analýza hustoty kapacít fotovoltaických elektrární v rozmiestnených v Českej republike, ktorá bola publikovaná v práci Gallay et al. (2015).

6 PRIESTOROVÁ INTERPOLÁCIA

Interpolácia je metóda, ktorou sa snažíme vypočítať údaje na miestach, pre ktoré nie sú známe údaje a nachádzajú sa medzi (lat. inter – medzi) dvoma ohraničujúcimi bodmi (polus - póly). V zásade ide o matematické metódy, na základe ktorých vypočítavame hodnoty modelovaného javu v bode, ktorý leží v priestore medzi vstupnými bodmi so známou hodnotou a cez ktoré (alebo v blízkosti ktorých) funkcia prechádza. Opakom interpolácie je extrapolácia pomocou ktorej modelujeme hodnoty sledovaného javu v miestach, ktoré sa nachádzajú mimo zadaných dát (nie sú medzi známymi bodmi, ale sa nachádzajú mimo rozsahu územia). Ako uvádza Hlásny (2007), extrapolácia je vo všeobecnosti menej presný postup a v praxi sa jej odporúča vyhýbať sa jej z dôvodu možnosti získania nezlučiteľných výsledkov, napríklad vo forme záporných odhadov údajov pozitívnej funkcie. Príkladom na extrapoláciu môže byť aj modelovanie vývoja určitého atribútu do budúcnosti.

V súčasnosti existuje veľké množstvo interpolačných metód a využívajú sa vo viacerých vedných odboroch a ich aplikáciách. Pri práci s priestorovými údajmi sa však používajú aj iné postupy, ktoré sú založené najmä na metódach priestorovej interpolácie. Ide o typ interpolácie, ktorá využíva polohovo lokalizované údaje. Výsledné modely sú veľmi závislé od použitých vstupných geoúdajov a interpolačných funkcií. Všeobecná formulácia problému priestorovej interpolácie môže byť definovaná nasledovne:

Daných je N hodnôt študovaného javu z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ počet meraní v bodoch $r_j = (x_j^{[1]}, x_j^{[2]}, \dots, x_j^{[n]})$, $j = 1, 2, \dots, N$ v rámci určitého regiónu n – dimenzionálneho priestoru, pre ktoré je možné nájsť d – rôznych funkcií $F(r)$, ktoré prechádzajú cez zadané body, čo znamená splnenie podmienky:

$$F(r_j) = z_j, j = 1, 2, \dots, N \quad (6.1)$$

Pretože existuje nekonečný počet funkcií, ktoré spĺňajú túto požiadavku, musia byť navrhnuté ďalšie podmienky, aby bolo možné definovať charakter interpolačnej funkcie. Výber interpolačnej funkcie je závislý prevažne od javu, ktorý chceme modelovať. Rôzne interpolačné metódy sú definované na základe rôznych podmienok, ako napríklad lokálnosť funkcie alebo jej hladkosť a pod. (Mitáš a Mitášová, 1999). Interpolácie sa používajú napríklad aj pre tvorbu digitálnych modelov reliéfu. Výber interpolačnej funkcie aj v prípade reliéfu je závislá na tom, aké vlastnosti výsledného modelu chceme dosiahnuť, resp. pre aké účely DMR chceme ďalej používať (simulácia tečenia vody, modelovanie oslnenia, modelovanie šírenia zvuku, distribúcie teploty a pod.).

Priestorové interpolačné metódy by sme mohli klasifikovať podľa viacerých kritérií, napr.:

a) Deterministické a stochastické metódy

Deterministické metódy sú založené na výpočte z hodnôt, ktoré boli získané meraním. Pri definovaní hodnôt vstupného bodového poľa nie je využitá teória pravdepodobnosti. Vypočítaný výsledok bude aj pri opakovaných výpočtoch rovnaký.

Stochastické metódy sú založené na náhodnosti a teórii pravdepodobnosti. Výsledok je skôr chápaný ako „jedna z možností“, preto pri opakovaní výpočtu môže byť dosiahnutý aj iný výsledok. Stochastické metódy vychádzajú z geoštatistických modelov, ktoré sú založené na priestorovej korelácii hodnôt.

b) Globálne a lokálne metódy

Globálny prístup vychádza z toho, že do výpočtu vstupujú hodnoty z celého dátového súboru. To znamená, že pre dátový súbor sa používa jedna funkcia a zmena hodnoty v jednom bode vstupného bodového poľa má vplyv na výsledok.

V prípade lokálneho prístupu priestorovej interpolácie sa predikovaná hodnota vypočíta iba z časti dátového súboru a najčastejšie prostredníctvom pohybujúceho sa okna sa výpočet opakuje toľko krát, kým pohybujúce sa okno neobsiahne celý dátový súbor. Zmena jednej hodnoty vstupného bodového poľa ovplyvní iba výsledok výpočtu v miestach, kde sa daná hodnota nachádza.

c) Exaktné a aproximujúce metódy

Exaktné interpolačné metódy sú také pri ktorých interpolačná funkcia prechádza všetkými bodmi vstupného bodového poľa. Spravidla ide o body, v ktorých hodnota bola určená meraním. Ak priebeh interpolačnej funkcie neprechádza bodmi vstupného bodového poľa, ale nachádza sa mimo nich v ich blízkosti, ide o aproximujúce metódy.

d) Metódy váženého priemeru a metódy iných funkcií (označované ako štatistické a matematické metódy)

Interpolačné funkcie by sme mohli rozdeliť na funkcie, ktoré sú založené na váženom priemere hodnôt vstupného bodového poľa (napr. Thiessenove polygóny, IDW, kriging, metóda prirodzeného suseda a pod.)

Druhú skupinu tvoria metódy využívajúce iné matematické funkcie (napr. spline, metóda trendového povrchu, metóda najbližšieho suseda a pod.).

Pre interpolačné metódy založené na empirických údajoch sa v odbornej literatúre používa aj termín odhad (estimation) alebo predikcia (prediction). Jednou z najdôležitejších podmienok pre použitie metódy priestorovej interpolácie je priestorová závislosť. To znamená, že analyzovaný jav musí byť spojitý, alebo aspoň čiastočne spojitý – autokorelovaný.

6.1 Lineárna kombinácia

Ako uvádza Hlásny (2007), metódy lineárnej interpolácie je možné vnímať ako funkcie založené na váženom priemere hodnôt v rámci vstupného bodového poľa. Všeobecné vyjadrenie pre lineárnu interpoláciu je.

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(s_i) \quad (6.2)$$

kde

$\hat{z}(s_0)$ je hodnota odhadovaná v bode s_0 umiestnenom v n -rozmernom priestore. V dvojrozmernom priestore preto platí vzťah $s = f(x, y)$;

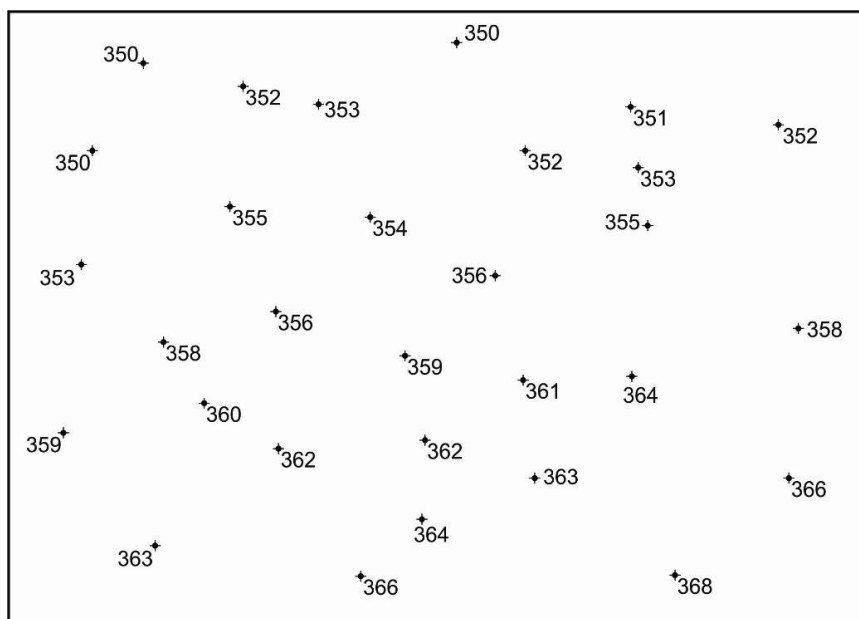
$z(s_i)$ predstavuje n dostupných hodnôt v pozíciách s_i , čiže ide o meranú hodnotu v bode s_i (kde $i = 1, 2, \dots, n$);

n je počet meraní, resp. počet hodnôt údajov zo vstupného bodového poľa;

λ_i je váha meranej hodnoty v bode s_i , pričom predpokladáme, že suma váh je rovná 1, čiže platí vzťah

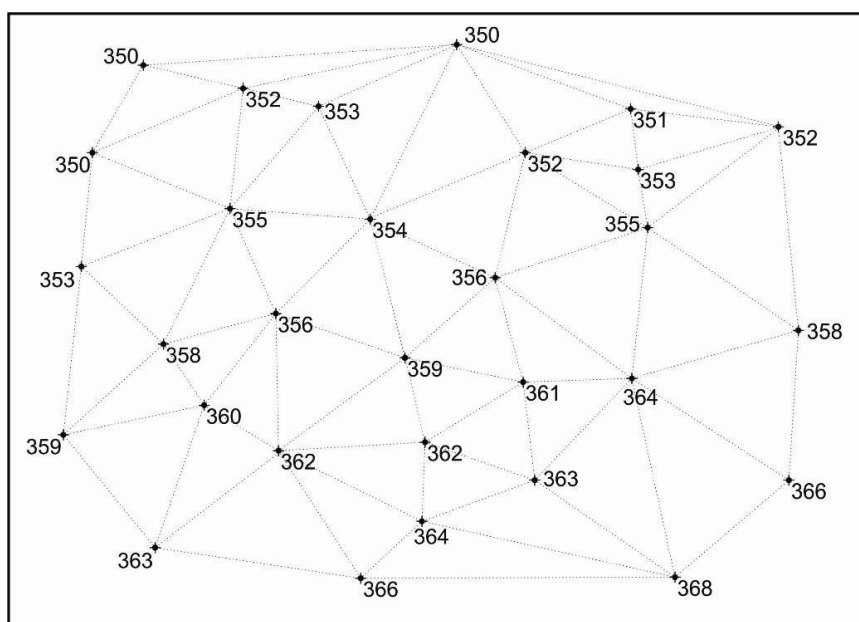
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (6.3)$$

Lineárna interpolácia sa veľmi často používa pri tvorbe topografickej mapy spracovaním bodových dát z geodetických meraní. S týmto spôsobom tvorby topografickej mapy sa študenti oboznamujú zvyčajne v 1. ročníku bakalárskeho stupňa v predmete Praktikum z topografického mapovania. Základom pre konštrukciu izolínií výšok (vrstevníc) je vstupné bodové pole, ktoré je merané v teréne pomocou totálnej stanice alebo GNSS. (obr. 6.1)



Obr. 6.1 Vstupné bodové pole s nadmorskými výškami vyjadrené v metroch nad morom.

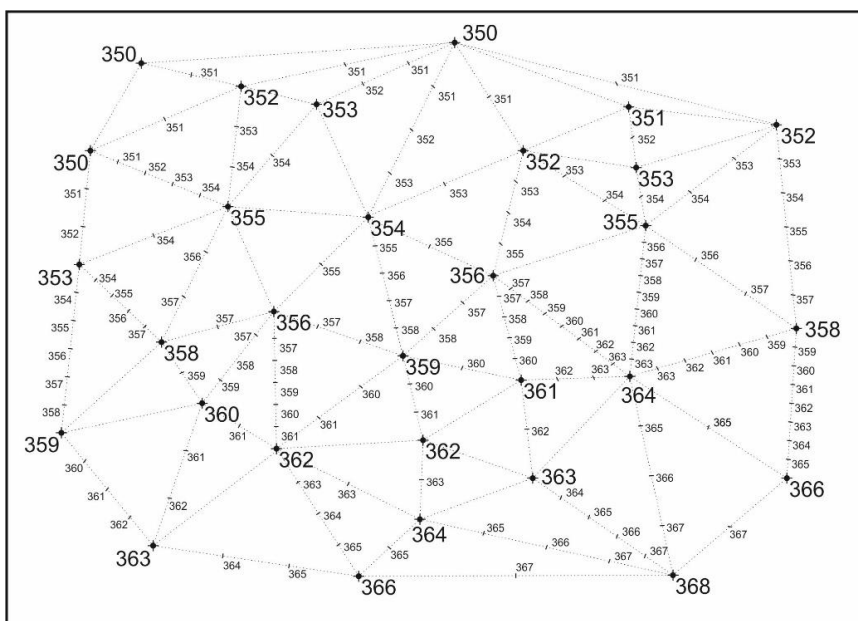
Každý bod zo vstupného výškového bodového poľa následne spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov. (obr. 6.2) Trojuholníky konštruujeme tak, aby sme za vrcholy trojuholníka zvolili najbližšie body a zároveň aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky. Týmto spôsobom sa snažíme vyhnúť dlhým a pretiahnutým tvarom trojuholníkov, ktoré nie sú vo všeobecnosti považované za ideálne tvary reprezentujúce sledovaný povrch. Viac o spôsobe tvorby trojuholníkovej siete je uvedené v kapitole 6.2 a 6.4.



Obr. 6.2 Vstupné bodové pole so spojnicami susedných bodov vytvára trojuholníkovú sieť.

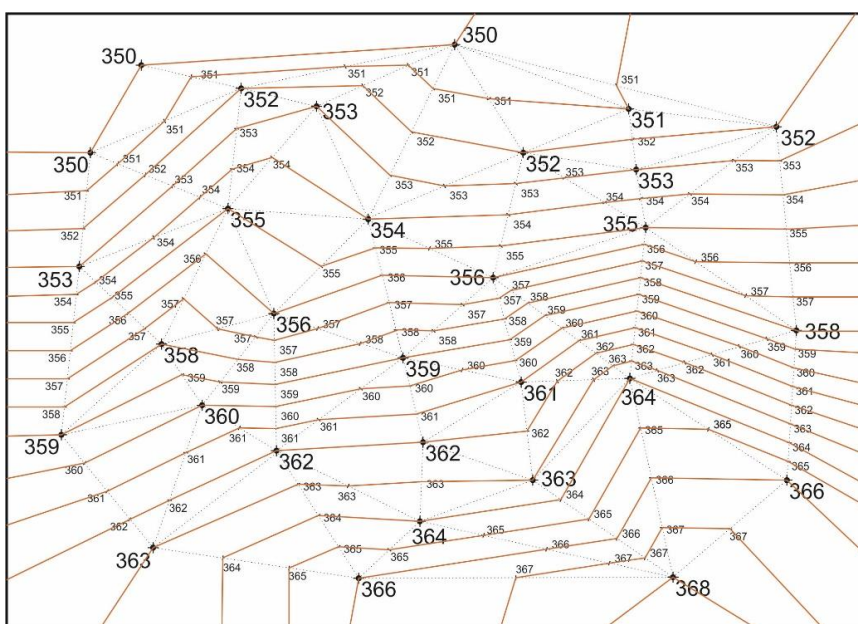
Strany jednotlivých trojuholníkov (spojnice bodov) nám slúžia k tomu, aby sme odhadli hodnoty výšky medzi dvoma bodmi zo vstupného bodového poľa. Pre odhad hodnôt vychádzame z predpokladu tzv. lineárnej závislosti, čo znamená, že hodnoty výšky sa menia priamo úmerne v závislosti od vzdialenosti k bodom vstupného bodového poľa. To znamená, že napr. ak v jednom bode je hodnota 350 m a v druhom bode je hodnota 353 m, tak predpokladáme, že hodnota výšky na spojnici medzi

týmto dvoma bodmi sa bude priamo úmerne meniť v závislosti od vzdialenosti od bodov. Ak budem bližšie pri hodnote 350 m, tak hodnoty sa budú viac približovať tejto hodnote. Váha hodnôt má v tomto prípade binárnu podobu, čo znamená, že do výpočtu odhadu hodnôt sú zahrnuté iba body na spojnici (krajné body), pričom hodnoty ostatných bodov na distribúciu hodnôt nemajú žiaden vplyv. Hodnoty odhadujeme tak, že spojnice medzi dvoma bodmi rozdelíme na rovnako dlhé časti v závislosti od rozdielu hodnôt medzi dvoma bodmi na spojnici. Pre rozdelenie spojnice na menšie časti je dôležité, aby sme si stanovili základný interval rozdelenia. (obr. 6.3)



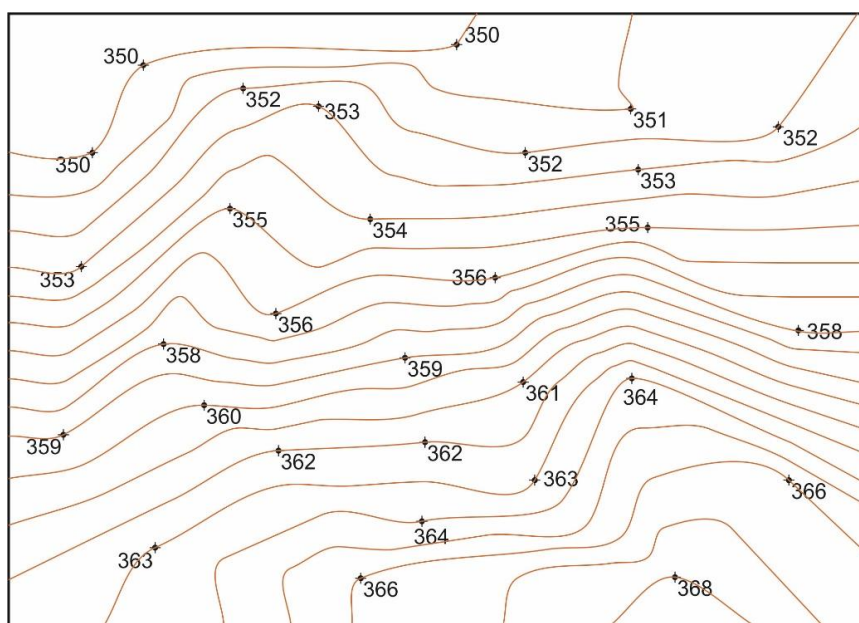
Obr. 6.3 Bodové pole s odhadnutými hodnotami na spojniciach medzi dvoma susednými bodmi. Základný interval rozdelenia spojnic je 1 m.

Po odhadnutí hodnôt na spojniciach medzi vstupnými bodmi vytvoríme izolínie. (obr. 6.4) To znamená, že spájame miesta s rovnakou hodnotou. Izolínie by mali byť kontinuálne, neprerušované. Preto je potrebné pri ich konštrukcii sledovať okolité hodnoty, aby sme eliminovali tvorbu diskontinuit, ktoré sú vo všeobecnosti považované za neprirodzené tvary.



Obr. 6.4 Vstupné bodové pole výšok s odhadnutými hodnotami na spojniciach bodov. Spojením rovnakých hodnôt vznikajú izolínie, ktoré reprezentujú sledovaný povrch.

Izolínie spájajúce miesta s rovnakou hodnotou, ktoré vznikli na základe lineárnej interpolácie, však vytvárajú zalomené čiary. Reálny povrch je však hladší, preto dochádza aj k vyhladeniu vrstevníc pomocou kriviek. Pre vyhladenie vrstevníc sú navrhnuté viaceré postupy. Pri ručnom vykresľovaní napr. v prípade tachymetrického náčrtku sa tvorba vrstevníc spravidla odvodzuje tak, že vrstevnicový obraz porovnáme so skutočnosťou a upravíme vzhľadom na morfológiu terénu. Výsledný vrstevnicový plán však možno považovať za subjektívny. V prípade automatických výpočtov sa používajú rôzne algoritmy na vyhladenie zalomených čiar reprezentujúcich vrstevnice. Ide napr. o metódu „*point normal triangles*“, kedy sa pomocou Bézierových trojuholníkových plátov určujú pre jednotlivé body plátu normály interpoláciou s lineárnou alebo kvadratickou variáciou a pomocou zahustenia trojuholníkovej siete prostredníctvom metódy „*Clough Toucher*“ dochádza ku zahuteniu aj bodového poľa, na základe ktorého sa odhaduje priebeh vrstevníc. Tým, že bodové pole odhadovaných hodnôt je hustejšie, majú vrstevnice aj hladší tvar. Pre vyhladenie vrstevníc je možné použiť aj metódy, ktorými sa izolínie konvertujú na krivky. Krivky sa následne vyhladzujú pomocou vyhladzovacieho parametra (*smoothing parameter*). (obr. 6.5)



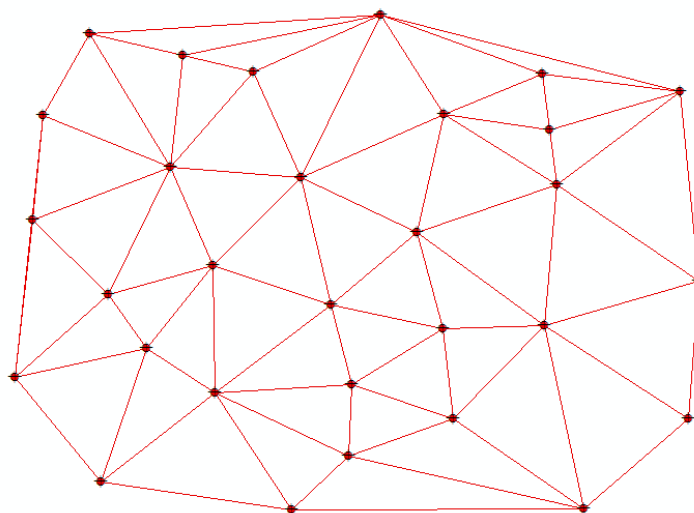
Obr. 6.5 Výsledný vrstevnicový plán po vyhladení zalomených izolínií.

6.2 Thiessenove polygóny

Thiessenove polygóny sú vytvorené z množiny vstupného bodového poľa procesom nazývaným ako Voronoiho, alebo Dirichletova teselácia. Základný princíp tejto metódy spočíva v tom, že priestor interpolácie sa rozdelí na oblasti so sférou vplyvu známeho, teda vstupného bodu, ktorý zároveň leží v strede týchto oblastí. Takto vzniknuté polygóny definujú „individuálne plochy vplyvu“ okolo každého vstupného bodu. Atribút daného bodu sa teda vzťahuje na celý priestor „plochy vplyvu“. Táto metóda je vhodná na transformáciu kvalitatívnych bodových dát, pri ktorých nie je potrebné uvažovať o spojitosti dát.

Postup tvorby Thiessenových polygónov by sme mohli rozdeliť do dvoch krokov.

1. Určenie spojnic medzi susediacimi bodmi vstupného bodového poľa.



Obr. 6.6 Delaunayova triangulácia

Červené body reprezentujú vstupné bodové pole, červené línie reprezentujú spojnice medzi susediacimi bodmi. Pri tvorbe spojnic medzi jednotlivými bodmi sú definované určité pravidlá, ktoré budú podrobnejšie vysvetlené v kapitole 6.4 v časti Delaunayova triangulácia.

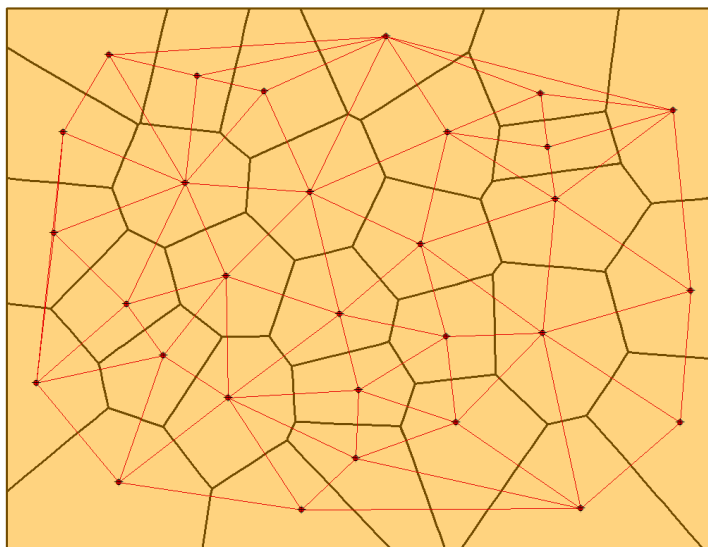
2. Tvorba „plôch vplyvu“.

Celá „plocha vplyvu“ daného bodu je ohraničená líniami. Tieto línie sú vlastne kolmice na spojnice medzi susediacimi bodmi (výsledok bodu 1) a sú umiestnené presne v polovici vzdialenosti medzi susediacimi bodmi. Takýmto spôsobom vznikajú tzv. bisektory, ktoré môžeme vyjadriť ako P_i . Ich základnou charakteristikou je, že všetky body ohraničené líniami majú bližšiu vzdialenosť k zdrojovému bodu ako k inému. Hodnota zdrojového bodu sa následne vzťahuje na hodnotu celého polygónu, čiže platí vzťah:

$$\hat{z}(s_0) = z(s_i) \quad (6.4)$$

a príslušné váhy sú vyjadrené vzťahom:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{ak } s_i \in P_i \\ 0 & \text{ak } s_i \notin P_i \end{cases} \quad (6.5)$$



Obr. 6.7 Voronoiho polygóny

Na obr. 6.7 sú zobrazené „plochy vplyvu“ fialovou farbou, čiže Voroneiove polygóny. Tvorba polygónov bola ohraničená rozsahom vstupného bodového poľa, čiže polohami (súradnicami) jeho krajných bodov. Z tohto dôvodu nedochádza k tzv. okrajovému efektu, avšak na okrajoch sú viditeľné neprirodzené tvary polygónov.

Metóda Thiessenových polygónov je základom pre interpolačné metódy ako napr. TIN, metóda najbližšieho suseda, prirodzeného suseda. Jej využitie ako samostatnej metódy bolo aplikované v oblasti humánnej geografie, napr. pri definovaní optimálnych hraníc pomocou teórie centrálnych miest, optimálne rozloženie uzlových bodov služieb a pod.

Použitie tejto metódy nie je vhodné pre spojité javy, pretože výsledkom tejto metódy je priestorová štruktúra údajov, ktorá má výrazný diskretný charakter. Čiže každý odhad je založený iba na jednej hodnote. Taktiež problematické pre výpočet sú okraje bodového poľa, kde je viditeľný tzv. okrajový efekt. Ten spočíva v tom, že „plochy vplyvu“ majú teoreticky nekonečnú plochu. Taktiež spojnice medzi dvoma susediacimi bodmi na okraji nemôžu byť použité pre tvorbu „plôch vplyvu“, nakoľko stred ich spojnic nie je hranicou, pre ktorú platí, že všetky body ohraničené líniami majú bližšiu vzdialenosť k zdrojovému bodu ako k inému.

6.3 Metóda najbližšieho suseda

Metóda najbližšieho suseda (Nearest Neighbour) patrí medzi interpolačné metódy, pri ktorých sú odhadované hodnoty určované na základe hodnôt najbližšieho miesta, pre ktorý máme zaznamenaný údaj. Táto metóda je navrhnutá pre grid, pričom jednotlivým bunkám (resp. ich uzlovým bodom, ktoré sú nositeľmi hodnoty celej bunky) je priradená hodnota ich najbližšieho bodu so známou hodnotou (teda najbližšieho známeho „suseda“). Ide o podobný postup ako v prípade definovania Thiessenových polygónov, avšak výsledkom je nie sú polygóny, ale grid. Tento postup je možné považovať za lineárnu kombináciu pre neznáme body, pričom najbližšiemu známemu bodu je priradená váha λ_i rovná 1 a ostatných bodom vstupného bodového poľa je priradená váha λ_i 0. Čiže platí, že:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{ak } d_{i,0} = \min \\ 0 & \text{ak } d_{i,0} \neq \min \end{cases} \quad (6.6)$$

kde

$d_{i,0}$ - je vzdialenosť medzi známym s_i a určovaným s_0 bodom.

Výsledný odhad je možné vyjadriť nasledovne:

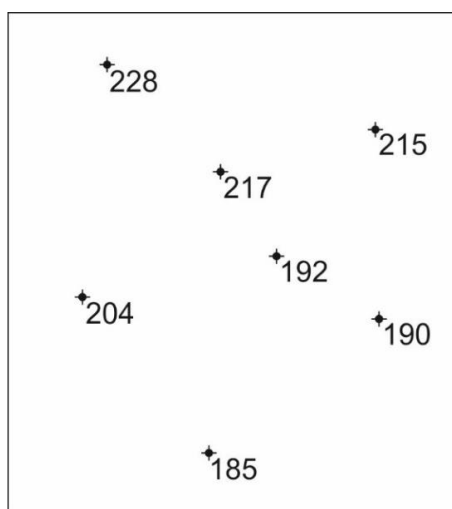
$$z(s_0) = z(s_i) \lambda_i \min \quad (6.7)$$

kde

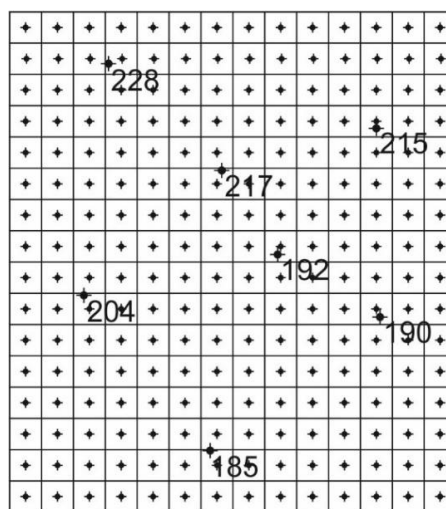
$z(s_0)$ – je hodnota v určovanom bode

$z(s_i)$ – je hodnota v bode s_i vstupného bodového poľa, pričom $i = 1, 2, 3, \dots, n$

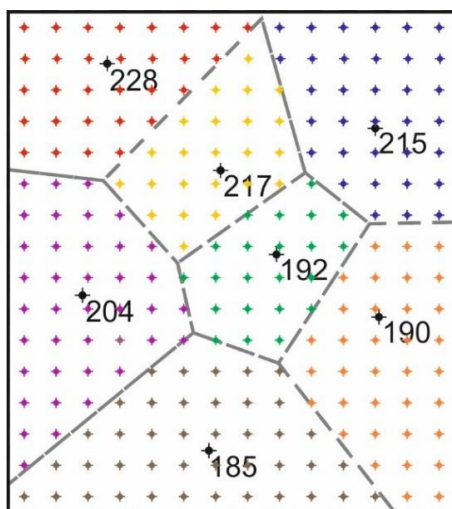
Celý postup je demonštrovaný na obr. 6.8, 6.9, 6.10 a 6.11.



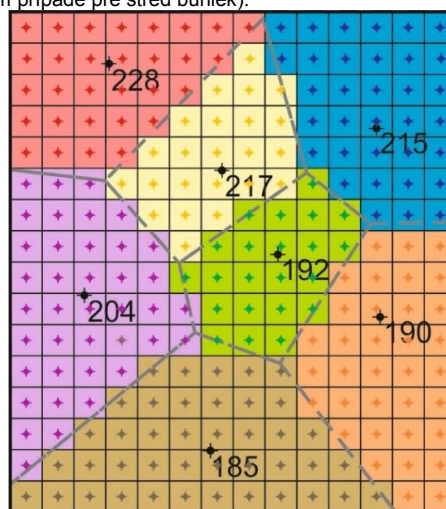
Obr. 6.8 Vstupné bodové pole hodnôt



Obr. 6.9 Vstupné bodové pole hodnôt s definovanou mriežkou. Hodnoty výsledného gridu sú určované pre uzlové body (v našom prípade pre stred buniek).



Obr. 6.10 Určenie hodnoty uzlových bodov na základe vzťahu $z(s_0) = z(s_i) \lambda_i \min$. Sivou prerušovanou čiarou sú znázornené Thiessenove polygóny.



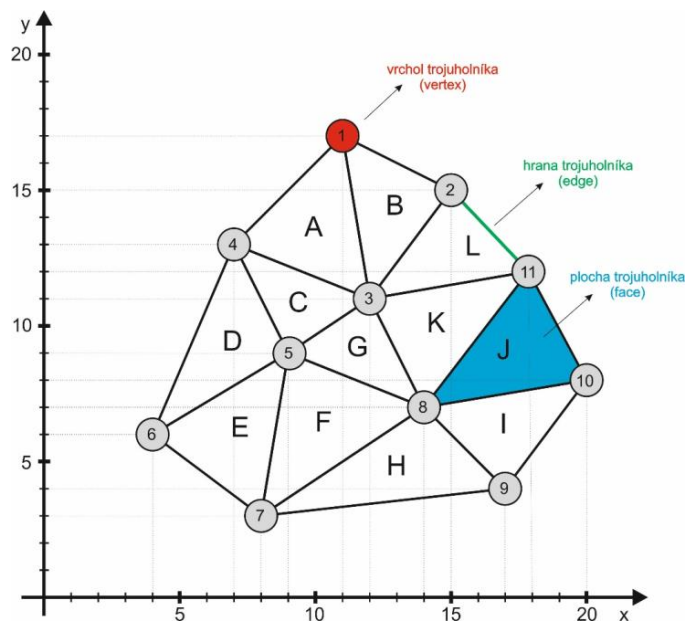
Obr. 6.11 Výsledná štruktúra gridu určená na základe metódy najbližšieho suseda.

6.4 Triangulácia

Nepravidelná trojuholníková sieť (TIN) je podľa Kumlera (1994) chápaná ako množina nepravidelne rozmiestnených bodov, ktoré sú spojené stranami, pričom kontinuálne vyplňajú priestor medzi bodmi neprekrývajúcimi sa trojuholníkmi. TIN sú niekedy označované aj ako meš (*mesh*, v preklade pletivo).

Pojem meš má však širší význam, nakoľko za meš možno považovať aj iné tvary ako trojuholníky, napr. štvoruholníky, päťuholníky a pod. ktoré tvoria sieť neprekrývajúcich sa elementov súvisle vyplňajúcich priestor medzi jednotlivými bodmi pozdĺž ich spojnic.

TIN je tvorený vrcholmi, stranami a trojuholníkmi, pričom súčasťou zápisu ich dátovej štruktúry sú aj informácie o topologických vzťahoch medzi týmito prvkami. Z toho vyplýva, že TIN majú zložitejšiu dátovú štruktúru zápisu v porovnaní s rastrovým údajovým formátom. (obr. 6.12)



Pomenovanie a grafická reprezentácia dátovej štruktúry TIN

ID	súradnice vrcholov trojuholníka		
	x	y	z
1	11	17	350
2	15	15	352
3	12	11	355
4	7	13	352
5	9	9	358
6	4	6	356
7	8	3	360
8	14	7	358
9	17	4	361
10	20	8	357
11	17	12	355

ID	vrcholy trojuholníka		
A	1	3	4
B	1	2	3
C	3	4	5
D	4	5	6
E	5	6	7
F	5	7	8
G	3	5	8
H	7	8	9
I	8	9	10
J	8	10	11
K	3	8	11
L	2	3	11

ID	susedné trojuholníky
A	B, C
B	A, L
C	A, D, G
D	C, E
E	D, F
F	E, G, H
G	C, F, K
H	F, I
I	H, J
J	I, K
K	G, J, L
L	B, K

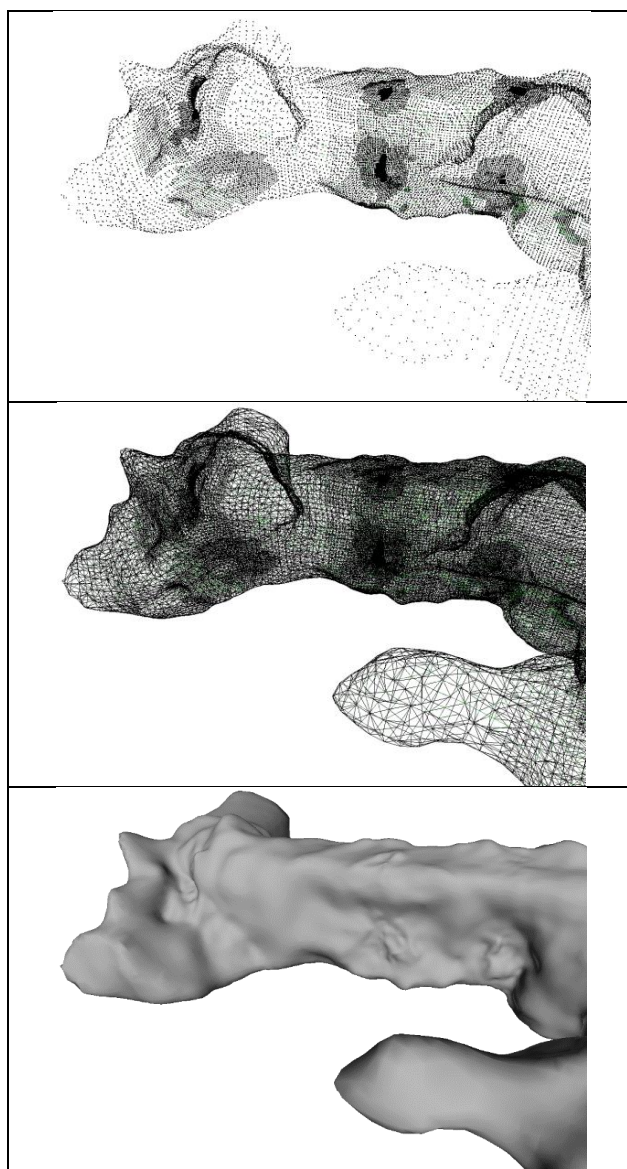
Súradnice vrcholov trojuholníka Zoznam vrcholov trojuholníkov Zoznam hrán pre trojuholníky

Obr. 6.12 Ukážka zápisu dátovej štruktúry TIN

Dátovú štruktúru TIN môžu tvoriť aj ďalšie informácie. TIN je možné zapisovať v princípe dvoma spôsobmi. Prvý spôsob sa označuje ako zápis typu „trojuholník za trojuholníkom“ a spočíva v uchovaní všetkých atribútov (napr. sklon a orientácia každého trojuholníka) v pamäti počítača, čím vzniká potreba vyšších nárokov na úložiskovú kapacitu. Druhý spôsob kladie menšie nároky na pamäť počítača, avšak niektoré atribúty musia byť vypočítané dodatočne. Tento spôsob zápisu do pamäti počítača sa označuje ako „body a ich susedia“ (obr.6.12). Dátové štruktúry pre trojuholníkové siete,

ktoré hrajú významnú úlohu pri tvorbe algoritmov popisujú práce (O'Rourke 1998; Boissonnat et al. 2002; El-Sheimy et al. 2005). Pre efektívnu vizualizáciu a efektívny zápis dátovej štruktúry má veľký význam aj možnosť kompresie a dekompresie dát.

TIN majú v súčasnosti veľké využitie pri digitálnej reprezentácii rôznych objektov. TIN modely sa využívajú hlavne v počítačovej grafike a sú objektom záujmu viacerých disciplín, najmä výpočtovej geometrie a počítačovej vizualizácie. V súčasnosti majú TIN modely veľké využitie aj v geoinformatike, čo súvisí hlavne s masívnym využívaním technológií založených na generovaní mračna bodov ako napr. laserové skenovanie, automatické spracovanie fotografických záznamov (napr. metóda Structure from Motion - SFM, Reflectance Transformation Imaging – RTI) a pod. Princípy metódy SFM sú podrobne uvedené napr. v práci Moons et al. (2008) a metóda RTI známa tiež ako *Polynomial texture mapping* je rozpracovaná v Malzbender (2000, 2001). Z mračna bodov sa následne generuje povrch skúmaných objektov v podobe mešu, ktorý reprezentuje rôzne objekty (napr. reliéf, budovy, vegetáciu, jaskyne). (obr. 6.13)



Obr.6.13 Na obrázku a) je znázornené decimované vstupné bodové pole získané z pozemného laserového skenovania (0,03% bodov z pôvodného mračna bodov), ktoré bolo použité pre b) tvorbu meše pomocou metódy Poisson a c) výsledného optimalizovaného tieňovaného povrchu časti jaskyne Domica.

Medzi hlavné výhody TIN patrí schopnosť vystihnúť povrch ľubovoľného objektu na rozličných úrovniach rozlíšenia. Triangulácia je veľmi často klasifikovaná aj ako metóda lineárnej interpolácie. Základný princíp spočíva v tom, že zo vstupného bodového poľa (alebo jeho časti) je skonštruovaná sieť trojuholníkov. Trojuholníky sú chápané ako rôzne naklonené rovinné elementy. Odhad hodnoty v ľubovoľnom bode $z(s_N)$ zodpovedá hodnote určenej na základe polohy vrcholov trojuholníka $z(s_A), z(s_B)$ a $z(C)$, pričom platí priama závislosť medzi vzdialenosťou bodu $z(s_N)$ od vrcholov $z(s_A), z(s_B)$ a $z(C)$, a ich hodnotami vo vrcholoch trojuholníka. Odhad hodnoty vo vybranom bode je teda definovaný ako vážený priemer hodnôt lokalizovaných v troch vrcholoch trojuholníka, do ktorého patrí sledovaný bod.

Existuje viacero spôsobov pre určenie váh. Ide hlavne o metódy založené na určení:

- a) plochy protiahlých trojuholníkov;

$$z(s_N) = \frac{z(s_A)P_{BCN} + z(s_B)P_{ACN} + z(s_C)P_{ABN}}{P_{ABC}} \quad (6.8)$$

kde

P je plocha trojuholníka a indexmi sú určené vrcholy trojuholníkov, pre s_a ;

$z(s_A), z(s_B), z(s_C)$ sú hodnoty vrcholu trojuholníka v bode A, B a C

- b) vzťahom medzi súradnicami jednotlivých vrcholov trojuholníka a súradnicami určovaného bodu.

Určenie váh λ_i sa vypočítava nasledovne:

$$\lambda_A = \frac{(x_N - x_C)(y_B - y_C) - (y_N - y_C)(x_B - x_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (y_A - x_C)(x_B - x_C)} \quad (6.9)$$

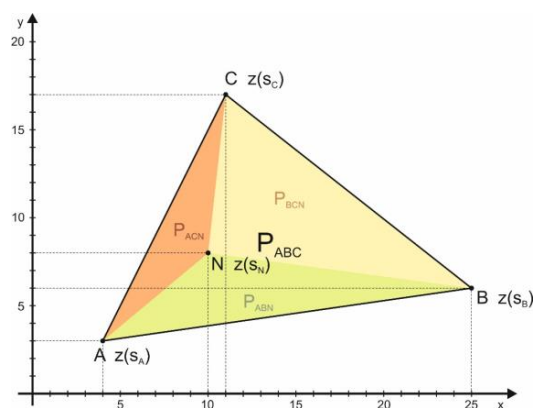
$$\lambda_B = \frac{(x_N - x_A)(y_C - y_A) - (y_N - y_A)(x_C - x_A)}{(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - x_A)(x_C - x_A)} \quad (6.10)$$

$$\lambda_C = \frac{(x_N - x_B)(y_A - y_B) - (y_N - y_B)(x_A - x_B)}{(x_C - x_B)(y_A - y_B) - (y_C - x_B)(x_A - x_B)} \quad (6.11)$$

Po vypočítaní váh λ_A, λ_B a λ_C sa hodnota v bode N určí na základe vzťahu:

$$z(s_N) = \sum_{i=A}^{A,B,C} \lambda_i z(s_i) \quad (6.12)$$

Váhy všetkých ostatných hodnôt vstupného bodového poľa sú rovné 0. Obe uvedené postupy dosahujú rovnaké výsledky. (obr. 6.14)



Obr. 6.14 Určenie váh v trojuholníku

Tvorba TIN je v zásade postavená na dvoch principiálnych úlohách, ktoré sa týkajú:

- A) optimalizácie rozloženia vrcholov trojuholníkov;
- B) optimalizácie tvarov trojuholníkov.

Obe úlohy majú veľký vplyv na výsledok a súvisia so snahou čo najlepšie vyjadriť povrch zobrazeného objektu. Týmto úlohám sa venuje veľká pozornosť najmä v počítačovej grafike, kde je v súčasnosti rozpracovaná široká paleta optimalizačných postupov založených na rozličných kritériách. V geografii (geoinformatike) v oblasti modelovania krajiny sa metóda TIN využívala v minulosti hlavne pre tvorbu digitálnych modelov terénu (georeliéfu). Modelovanie georeliéfu pomocou trojuholníkovej siete a odvodzovaniu morfometrických parametrov z nej sa podrobne venoval Krcho (1990). Za optimálne miesta vrcholov trojuholníkov považuje tzv. singulárne body, resp. singularities, čiže miesta s výraznou zmenou priebehu povrchu, ktoré tvoria kostru tvaru georeliéfu (úpätie, sedlo, hrebeň a pod.). Pri tvorbe tvaru trojuholníkov využíva tvarovo-závislú trianguláciu založenú na inkrementálnej konštrukcii trojuholníkovej siete. Zjednodušene by sme mohli povedať, že ide o trianguláciu, ktorej cieľom je zachytiť čo najlepšie tvar georeliéfu a pri konštrukcii trojuholníkovej siete bol navrhnutý algoritmus, ktorý vytvára trojuholníky postupne (krok za krokom), pričom pre tvorbu každého trojuholníka boli zohľadnené viaceré kritériá.

V súčasnosti sú rozpracované viaceré metódy triangulácie. Vychádzajúc z práce Feciskanin (2009, 2010) je možné definovať a klasifikovať rôzne prístupy k vytvoreniu trojuholníkovej siete na:

1. tvarovo-závislú trianguláciu;
2. dátovo-závislú trianguláciu.

Tvarovo-závislá triangulácia je spôsob tvorby trojuholníkov, pri ktorej je hlavné kritérium založené na zachovaní tvaru trojuholníka. Cieľom triangulácie založenej na tvarovo-závislých kritériách je zamedziť vzniku dlhých a úzkych trojuholníkov, ktoré sú považované za nie ideálne tvary reprezentujúce zobrazený povrch. Tvarovo-závislú trianguláciu je možné rozdeliť podľa kritérií tvorby trojuholníkov na postupy, ktoré vychádzajú z:

- a) dĺžok strán trojuholníkov;
- b) veľkosti uhlov v trojuholníkoch.

V prípade kritérií, ktoré sú založené na dĺžke strán trojuholníkov je možné definovať nasledujúce subkritériá:

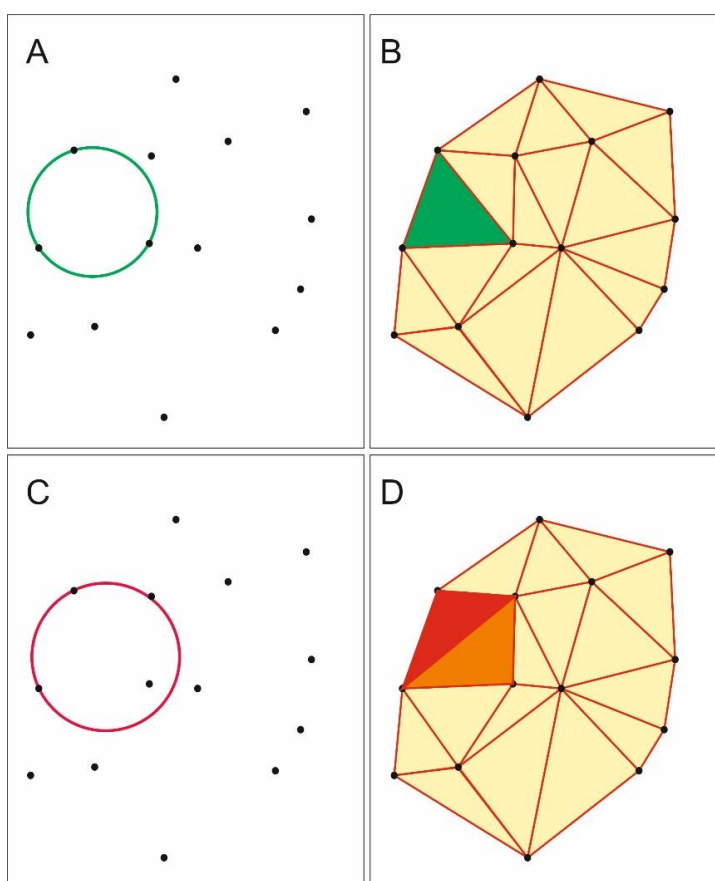
- minimalizácia súčtu dĺžok strán trojuholníka;
- maximalizácia minimálnej výšky trojuholníka;
- minimalizácia maximálnej dĺžky strany trojuholníka;
- minimalizácia pomeru najdlhšej strany a výšky na túto stranu.

V prípade kritérií, ktoré vychádzajú z veľkosti uhlov v trojuholníku je možné definovať tieto subkritériá:

- minimalizácia maximálneho uhla;
- maximalizácia minimálneho uhla;
- minimalizácia maximálnej excentricity (súčtu vzdialených vrcholov od stredu opísanej kružnice trojuholníka).

Jedna z najznámejších metód budovania trojuholníkovej siete je **Delaunayova triangulácia**, Feciskanin (2010) konštatuje, že takmer všetky dostupné softvérové riešenia využívajú pri tvorbe TIN Delaunayovu trianguláciu, ktorá je rozšírená o viac či menej pokročilú správu obmedzení pre tvorbu trojuholníkov. Tento typ triangulácie je charakteristický tým, že trojuholníky nepravidelnej trojuholníkovej siete sú budované na základe niekoľkých kritérií (obr. 6.15):

- do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka nespadá vrchol žiadneho ďalšieho trojuholníka,
- maximalizuje minimálny uhol v trojuholníku,
- trojuholníky sú jedinečné a neprekrývajú sa,
- hranicu trojuholníkovej siete tvorí konvexný obal bodov vstupného bodového poľa,
- ak žiadna štvorica bodov nie je kocirkulárna (neleží na kružnici), triangulácia je jednoznačná.



Obr. 6.15 je znázornené (A) vstupné bodové pole (čierny body), zelená kružnica znázorňuje kritérium, ktoré hovorí o tom, že do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka nespadá vrchol žiadneho ďalšieho trojuholníka. (B) je znázornená výstupná štruktúra TIN skonštruovaná metódou Delaunayovej triangulácie, zelenou farbou je znázornený testovací trojuholník z bodov selektovaných podľa (A). Trojuholník na (D) znázornený s červenou (a oranžovou) farbou nespĺňa podmienku, nakoľko (C) do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka spadá vrchol iného trojuholníka.

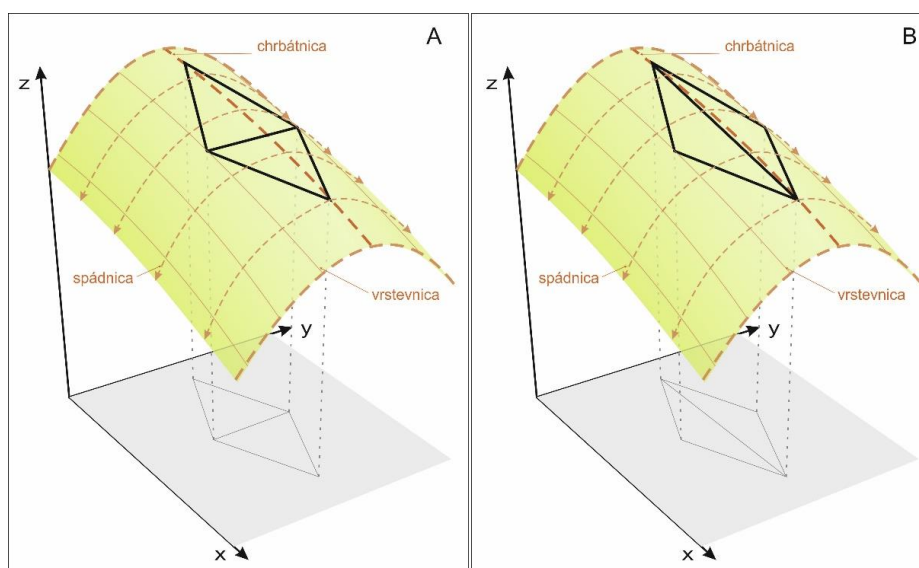
Feciskanin (2009) konštatuje, že niektoré z kritérií, ktorým sa charakterizuje Delaunayovu trianguláciu sú akoby duplicitné, napr. kritérium maximalizácie minimálneho uhla trojuholníka možno považovať za ekvivalentné ku kritériu opísanej kružnice trojuholníka, do ktorej nepatrí iný bod z množiny vrcholových bodov. Hlásny (2007) uvádza, že vo väčšine GIS-ov je implementovaný aj algoritmus, ktorý bol navrhnutý Borisom Nikolajevičom Delomenom v 30. rokoch 20. storočia a je

založený na Delaunayovej triangulácii, avšak vrcholy trojuholníkov ležia na Thiessenových polygónov. Princíp tejto metódy spočíva v tom, že množina náhodne distribuovaných bodov môže byť využitím Thiessenových polygónov jedinečne transformovaná do trojuholníkovej siete. Jedinečnosť triangulácie je zabezpečená tvorbou trojuholníkov len z bodov tvoriacich vrcholy susediacich polygónov.

Dátovo-závislá triangulácia je typ tvorby trojuholníkovej siete, ktoré sa snažia prispôbovať trojuholníky modelovanej ploche. Primárnym kritériom pre tvorbu trojuholníkov v tomto prípade predstavuje váha strán trojuholníka. Priradenie váhy stranám na základe zvolenej funkcie je rozhodujúca pre určenie tvaru a vlastností výslednej trojuholníkovej siete. Najčastejšie sú vstupnými hodnotami pre váhovú funkciu odvodené hodnoty vzťahujúce sa k dvom trojuholníkom, prípadne ich vrcholom, ktorým patrí oceňovaná hrana. Medzi subkritériá pre definovanie váhovej funkcie, ktoré určujú vzájomnú polohu trojuholníkov patria:

- uhol medzi normálami trojuholníkov;
- skok v derivácii normál cez spoločnú stranu;
- vzdialenosť vrcholu od roviny susedného trojuholníka;
- vzdialenosť vrcholu v smere osi z od roviny susedného trojuholníka.

Všetky uvedené funkcie vychádzajú z polohy roviny trojuholníka určenej jej normálnou. Ich spoločnou črtou je minimalizovať zmeny vlastností na stranách trojuholníkov. Keďže pre potreby modelovania reliéfu pomocou TIN tieto funkcie nie sú vhodné, nakoľko nedokážu zachytiť diskontinuity v reliéfe (miesta s výraznou zmenou – chrbátnice, údolnice a pod.), boli navrhnuté ďalšie funkcie založené na vyjadrení váhy spojnic, ktoré vychádzajú z určenia krivosti povrchu v určitých smeroch (obr.6.16). Viac sa tejto problematike venuje Feciskanin (2009, 2010).



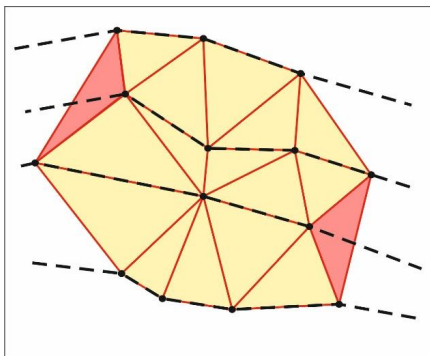
Príklad A) tvarovo-závislej a B) dátovo-závislej triangulácie
obr. 6.16 Upravené podľa Feciskanin (2009)

Ako bolo uvedené vyššie, väčšina softvérov GIS vytvára TIN pomocou Delaunayovej triangulácie. Hlásny (2007) uvádza, že do procesu triangulácie je pre dosiahnutie vernejšieho modelu možné vnášať isté obmedzenia, resp. isté pravidlá triangulácie, pričom rozoznávame:

- a) pravidlá pre tvorbu geometrie trojuholníkov;
- b) pravidlá korigujúce priebeh trojuholníkovej siete vkladáním tzv. povinných spojnic.

Pravidlám pre tvorbu geometrie trojuholníkov sme sa venovali vyššie. V prípade modelovania reliéfu sa veľmi často využíva aj pravidlo, že ak sa pre tvorbu TIN využívajú napr. vrstevnice (presnejšie ich lomové body – tzv. *vertex*), je možné stanoviť podmienku, že trojuholník nesmie prechádzať naprieč

vrstevnicou (obr. 6.17). Existujú aj ďalšie analogické kritériá, ktoré sa týkajú napr. planárnych (rovných) plôch (plocha s konštantných sklonom, napr. ihrisko, jazerá, strechy a pod.).

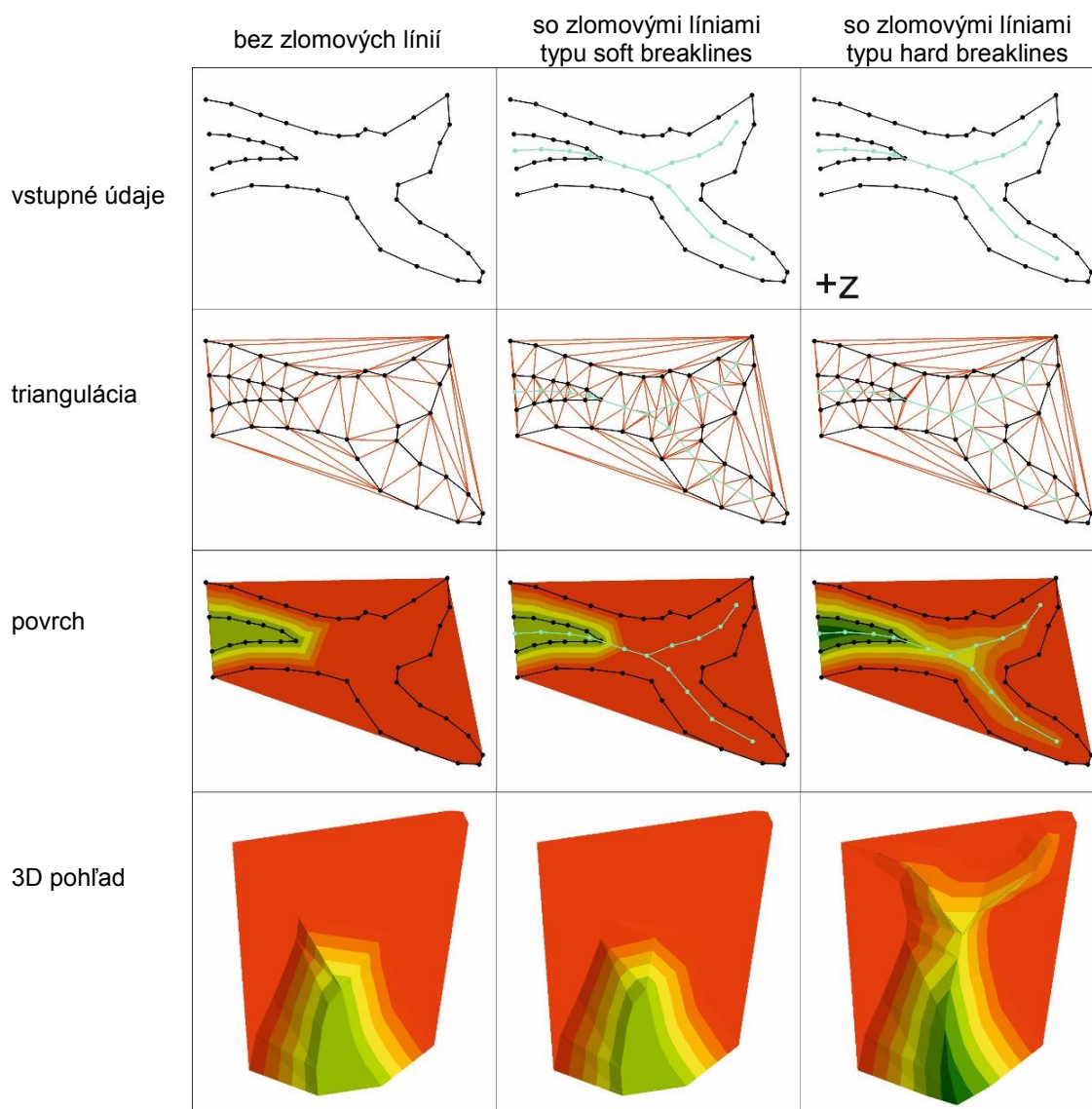


Obr. 6.17 Čiarkovanou čiarou sú znázornené vrstevnice, červené trojuholníky prechádzajú naprieč vrstevnicou, čím nespĺňajú podmienku. Pre ich správne vykreslenie je potrebné pridať ďalšie body, alebo ich nezobrazovať.

Pravidlá korigujúce priebeh trojuholníkovej siete pomocou vkladania povinných vrcholov trojuholníka sú založené na vkladaní doplnkových údajov. Týmto spôsobom je možné dosiahnuť vernejšie vykresľovanie povrchov skúmaných objektov, nakoľko sa odstraňujú neprirodzené tvary vzniknuté matematickou podstatou triangulácie. Ide o typy údajov, ktoré môžu mať bodový, líniový a plošný charakter. Proces tvorby trojuholníkovej siete vkladáním tzv. povinných spojnic môžeme ovplyvniť cez:

1. prídanie ďalších vstupných bodov, resp. vrcholových bodov trojuholníka (tzv. *mass points*);
2. prídanie zlomových línií (tzv. *breaklines*).

Pridanie ďalších bodov do vstupného bodového poľa je možné urobiť na základe doplnkových meraní, čím dochádza ku zahusteniu vstupného bodového poľa napríklad v prípade reliéfu o kóty, ktoré reprezentujú dno terénnych depresí, prípadne vrcholy pohorí a pod.



Obr. 6.18 Tvorba TIN povrchov

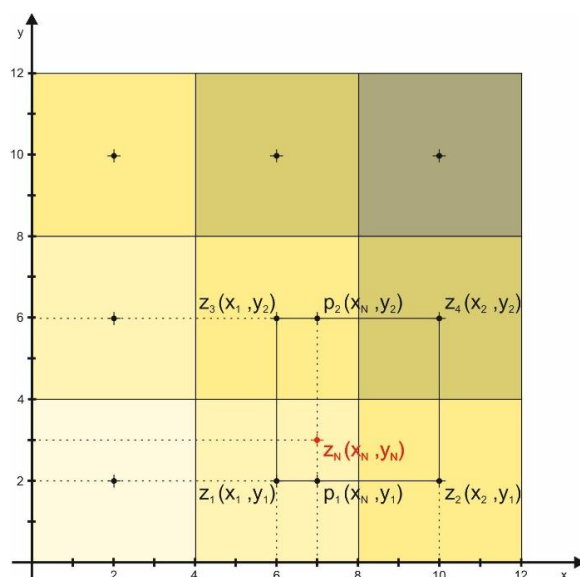
Zlomové línie (tzv. *breaklines*) by sme mohli charakterizovať ako miesta významnej a náhlej zmeny priebehu povrchu. Vo väčšine GIS softvéroch sa rozlišujú dva základné typy zlomových línií (*break lines*):

- Soft breaklines – „mäkké hrany“, používajú sa v prípadoch, keď nedochádza k prerušeniu hladkosti modelovaného povrchu, avšak sa na povrchu nachádza určitá zmena priebehu povrchu. Pre vykreslenie priebehu povrchu sa z línií typu „soft breaklines“ využijú iba lomové body (vertex), ktoré sú doplnené ako vrcholy trojuholníkov.
- Hard breaklines – „výrazné hrany“, sa používajú v prípadoch výraznej zmeny priebehu povrchu, kde dochádza k diskontinuitám hladkosti povrchu. V takom prípade je potrebné, aby vložené prvky obsahovali hodnoty Z.

6.5 Bilineárna interpolácia

Bilineárna interpolácia sa používa hlavne pre odhad hodnôt zapísaných v pravidelnej dátovej štruktúre, napr. v rastri. Pre raster spravidla platí, že hodnota jedného bodu bunky (v strede, alebo na

jej okraji) sa vzťahuje na celú plochu bunky. Bilineárnou interpoláciou teda odhadujeme hodnotu pre bod v mieste, ktoré nie je totožné s polohou bodu bunky určujúci hodnotu v bunke. (obr. 6.19)



Obr. 6.19 Vizualizácia rastrovej štruktúry údajov. V strede každej bunky je bod, ktorého hodnota sa vzťahuje na celú plochu bunky. Červenou farbou je znázornený záujmový bod z_N , pre ktorý chceme určiť hodnotu. Najskôr vypočítame hodnoty v smere osi X pre pomocné body p_1 a p_2 pomocou lineárnej interpolácie. Následne určíme hodnotu v smere Y pre záujmový bod z_N .

Pre odhad hodnoty v bode z_N si najskôr určíme odhad pomocou lineárnej interpolácie v smere osi X a vyjadríme hodnoty v bode p_1 a p_2 , pre ktoré platí vzťah:

$$p_1 = \frac{(x_2 - x_N)}{(x_2 - x_1)} z_1 + \frac{(x_N - x_1)}{(x_2 - x_1)} z_2 \quad (6.13)$$

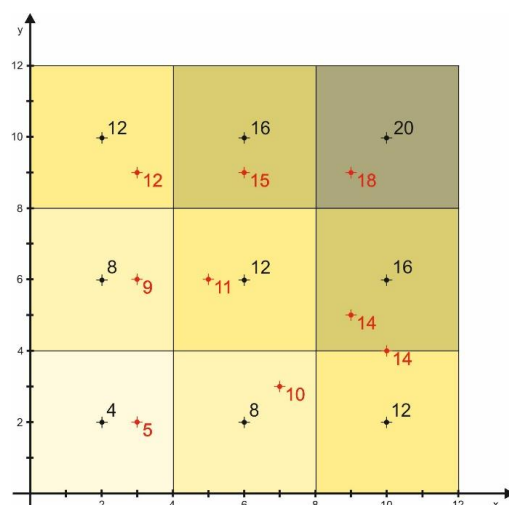
$$p_2 = \frac{(x_2 - x_N)}{(x_2 - x_1)} z_3 + \frac{(x_N - x_1)}{(x_2 - x_1)} z_4 \quad (6.14)$$

Pre výsledný odhad hodnoty v bode z_N si pomocou lineárnej interpolácie vyjadríme hodnotu v smere osi Y pre ktorú platí vzťah:

$$z_N = \frac{(y_2 - y_N)}{(y_2 - y_1)} p_1 + \frac{(y_N - y_1)}{(y_2 - y_1)} p_2 \quad (6.15)$$

Hlásny (2007) uvádza, že výsledok interpolácie nie je závislý od poradia lineárnych interpolácií hodnôt v bodoch p_1 a p_2 . To znamená, že ak najprv realizujeme lineárnu interpoláciu v smere osi Y, a potom v smere osi X, výsledok bude rovnaký, ako keď budeme postupovať v opačnom poradí.

Použitie bilineárnej interpolácie ilustrujeme na nasledujúcom príklade, ktorý je zobrazený na obr. 6.20.

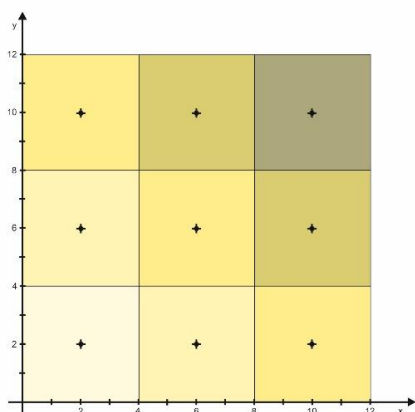


Obr. 6.20 Čierne body v bunky sú nositeľmi hodnôt, ktorých hodnota sa vzťahuje na celú plochu bunky. Červenou farbou sú znázornené vybrané body, pre ktoré boli vypočítané hodnoty pomocou bilineárnej interpolácie.

Metóda bilineárnej interpolácie sa používa aj pri úlohách, kedy je potrebné vykonať prevzorkovanie (resampling) rastra. Prevzorkovaním dátovej štruktúry na menšie časti (tzv. downscaling) vzniká nová dátová štruktúra.

```
ncols      3
nrows      3
xllcorner  0
yllcorner  0
cellsize   4
NODATA_value -9999
12 16 20
08 12 16
04 08 12
```

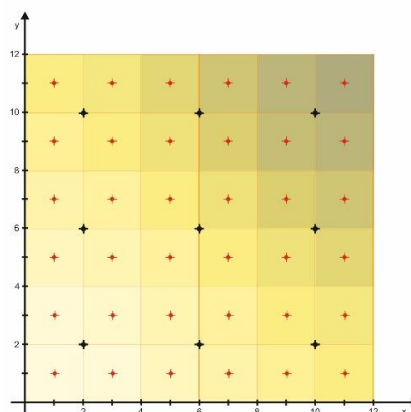
Obr. 6.21 Ukážka zápisu rastrovej dátovej štruktúry vo formáte ASCII pred prevzorkovaním.



Obr. 6.23 Vizualizácia rastrovej dátovej štruktúry pred prevzorkovaním. Čierne značky reprezentujú body, pre ktoré sa vzťahuje hodnota. Ich pozícia je v strede bunky.

```
ncols      6
nrows      6
xllcorner  0
yllcorner  0
cellsize   2
NODATA_value -9999
12 13 15 17 19 20
11 12 14 16 18 19
09 10 12 14 16 17
07 08 10 12 14 15
05 06 08 10 12 13
04 05 07 09 11 12
```

Obr. 6.22 Ukážka zápisu rastrovej dátovej štruktúry vo formáte ASCII po prevzorkovaní použitím bilineárnej interpolácie.

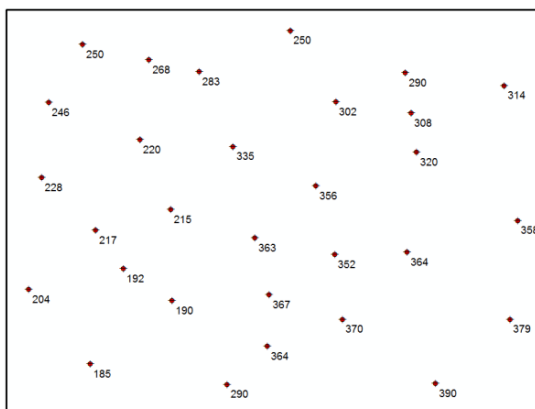


Obr. 6.24 Vizualizácia rastrovej dátovej štruktúry po prevzorkovaní. Čierne značky reprezentujú pôvodné body, ktoré boli nositeľom hodnôt pre celú bunku. Červene značky reprezentujú body, ktorých hodnoty boli odvodené na základe lineárnej interpolácie.

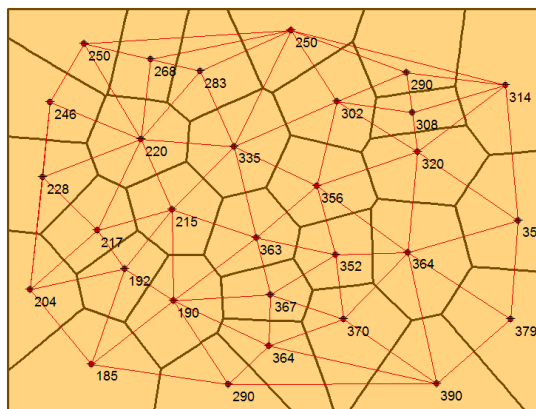
6.6 Metóda prirodzeného suseda

Metóda prirodzeného suseda je založená na priradzovaní váh podľa veľkosti plôch Thiessenových polygónov pre určovaný bod (Sibson, 1981). Táto metóda sa tiež označuje ako Sibsonova interpolácia, alebo „area stealing“ interpolácia.

Prvým krokom je tvorba trojuholníkovej siete zo vstupného bodového poľa (obr. 6.25). Na základe Delaunayovej triangulácie sa pomocou prienikov kolmíc na stredy strán trojuholníkov vytvorí Voroniov polygón (obr. 6.26), ako to bolo popísané v kapitole 6.2.

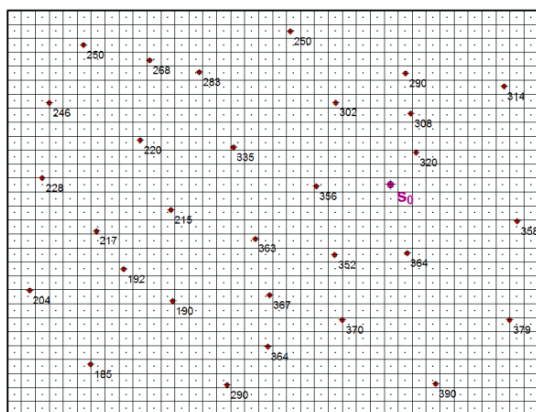


Obr. 6.25 Vstupné bodové pole z hodnotami nadmorskej výšky vyjadrené v metroch nad morom.

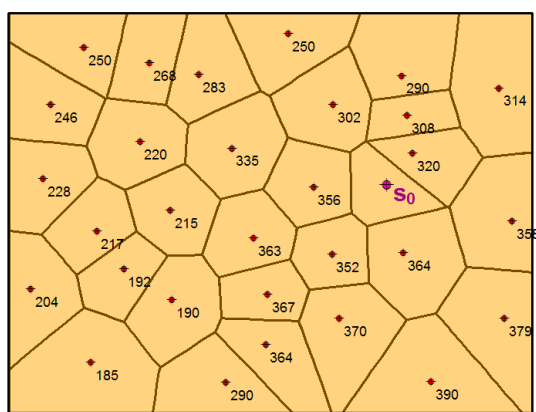


Obr. 6.26 Voroniov polygóny (ohraničené tmavo) pre vstupné bodové pole, ktorým predchádzalo vytvorenie trojuholníkovej siete pomocou Delaunayovej triangulácie.

Ďalším krokom je určovanie váh hodnôt vstupného bodového poľa. Určenie váh sa vypočíta tak, že do vytvorenej siete polygónov sa vloží bod, pre ktorý chceme určiť hodnotu (obr. 6.27). Vložením bodu sa celá sieť trojuholníkov a Voroniových polygónov prebuduje. (obr. 6.28).



Obr. 6.27 Grid, pre ktorý sú odhadované hodnoty z bodov vstupného bodového poľa. V strede každej bunky je bod, pre ktorý sa vypočítava hodnota. V obrázku sa zamerajme na vložený (určovaný) bod s_0 , ktorý je znázornený fialovou farbou.



Obr. 6.28 Prebudovaná sieť Voroniových polygónov začlenením bodu s_0

Výsledný tvar polygónu pre určovaný bod sa naloží na pôvodnú sieť Voroniových polygónov. Váhy hodnôt okolitých (susedných) bodov vstupného bodového poľa sa určia na základe veľkosti plôch, ktoré sú ohraničené Voroniovým polygónom vytvoreným pre určovaný bod (teda nie celá plocha pôvodných Voroniových polygónov určených pre susedné body). Pre váhy plôch platí, že suma podielov Voroniových polygónov pre body vstupného bodového poľa sa rovná 1. Váhy hodnôt susedných známych bodov λ_i teda určíme nasledovne:

$$\lambda_i = \frac{pS_i}{\sum_{i=1}^n pS_i} \quad (6.16)$$

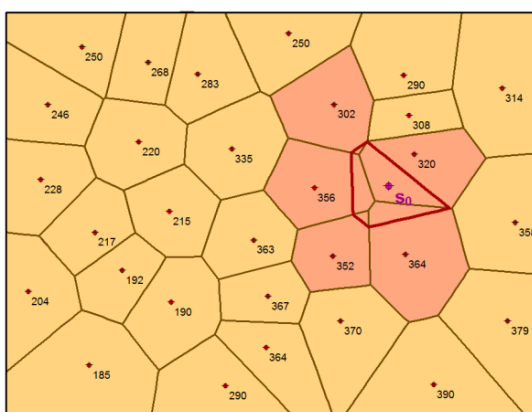
pričom platí, že

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (6.17)$$

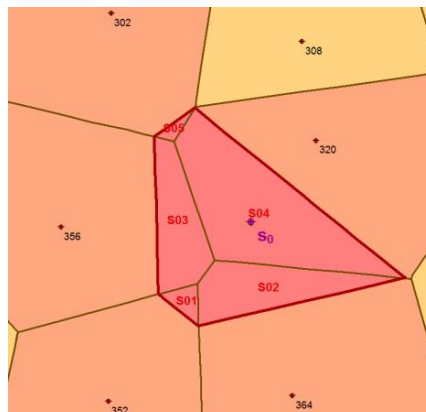
kde

pS_i – je časť plochy Voronoiovho polygónu susedného bodu s_i .

Postup určenia váhy časti plochy Voronoiovho polygónu susedného bodu je vyjadrený na obr. 6.29 a 6.30.



Obr. 6.29 Určenie váh pre susedné známe body. Červenou sú znázornené Voronoiove polygóny pôvodnej štruktúry patriace susedným bodom k určovanému bodu s_0 . Červenou farbou je znázornená hranica Voronoioho polygónu, ktorý bol vytvorený po prebudovaní siete polygónov po vložení bodu s_0 .



Obr. 6.30 Detail na časti plochy Voroniových polygónov susediacich bodov (svetlo červená farba výplne polygónu), ktoré ohraničuje Voronoioho polygón určeného bodu (reprezentovaný červenou čiarou). Na základe pomeru veľkosti plôch ohraňčených červenou čiarou sa určuje váha hodnôt susediacich bodov.

Odhadovanú hodnotu $z(s_0)$ v bode s_0 určíme na základe vzťahu:

$$z(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(s_i) \quad (6.18)$$

kde

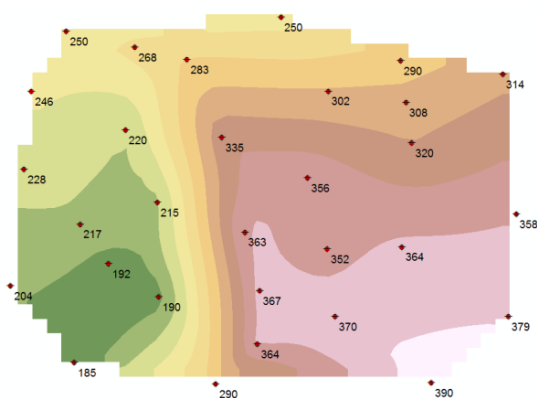
$z(s_i)$ – je hodnota v susednom bode.

Na základe určenia obsahu jednotlivých plôch môžeme vypočítať váhy susedných bodov a následne určiť odhadovanú hodnotu $z(s_0)$ v bode s_0 . Kvôli prehľadnosti uvádzame výpočty v tab. 6.1.

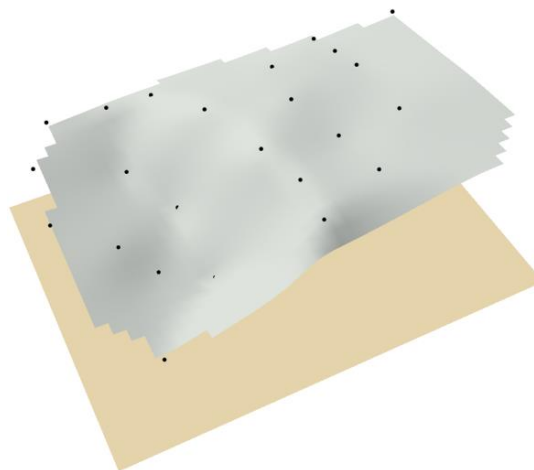
	Plocha pS_i (v m^2)	$\lambda_i = \frac{pS_i}{\sum_{i=1}^n pS_i}$	$z(s_i)$	$\lambda_i z(s_i)$
S01	1 678,0	0,02	352	7,04
S02	13 566,0	0,23	364	83,72
S03	11 725,5	0,20	356	71,20
S04	32 016,0	0,54	320	172,80
S05	752,5	0,01	302	3,02
Σ	59 738,0	1,00		337,78

Tab. 6.1 Výpočet hodnoty v určovanom bode

Po prepočte všetkých ostatných bodov, ktoré sa nachádzajú v strede každej bunky, dostaneme výsledný povrch, ktorý je znázornený na obr. 6.31 a obr. 6.32.



Obr. 6.31 Ukážka 2D povrchu, ktorý vznikol pomocou interpolačnej metódy prirodzeného suseda.



Obr. 6.32 Ukážka 3D povrchu, ktorý vznikol pomocou interpolačnej metódy prirodzeného suseda.

Výsledný interpolovaný povrch odvodený pomocou metódy prirodzeného suseda je spojitý a vyhladený bez extrapolovaných hodnôt.

6.7 Metóda inverzne váženej vzdialenosti (IDW)

Jednou z najčastejšie používaných metód v GIS-och je metóda *inverzne váženej vzdialenosti* (*Inverse Distance Weighting* – IDW). Táto metóda vychádza z rovnakého geoštatistického princípu ako priestorová autokorelácia, ktorú sme si predstavili v samostatnej kapitole. Základným východiskom tejto metódy je určenie váh pre vstupné bodové pole. Pri IDW platí zásada, že čím je známy bod bližšie k interpolovanému bodu, tým je jeho vplyv na interpolovaný bod väčší. Pri určovaní váh sa využíva princíp tzv. inverznej vzdialenosti. Znamená to, že v okolí interpolovaného bodu sa zvolí určitý počet zadaných bodov (alebo sa definuje rozloha oblasti, v ktorej je možné hľadať body), pre ktoré sa vypočítajú vzdialenosti k interpolovanému bodu. Následne sa na základe váhy týchto vzdialeností vypočíta vážený priemer hodnôt bodov. Inverzná vzdialenosť môže byť navyše modifikovaná vhodnou mocninou, čím sa zvyšuje váha bližších hodnôt. Celý postup pre vyjadrenie váhy λ_i je možné zapísať nasledovným vzťahom:

$$\lambda_i = \frac{1}{(d_{i,0})^p} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(d_{i,0})^p}\right)} \quad (6.19)$$

	$z(s_i)$	$d_{i,0}$	$(d_{i,0})_i^p$	$\frac{1}{(d_{i,0})_i^p}$	$\frac{\frac{1}{(d_{i,0})_i^p}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d_{i,0}}\right)^p}$	$z(s_i) \frac{\frac{1}{(d_{i,0})_i^p}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d_{i,0}}\right)^p}$
s ₁	356	178,92	32012,3664	0,000031	0,249986	88,99
s ₂	364	260,59	67907,1481	0,000015	0,117847	42,90
s ₃	320	232,56	54084,1536	0,000018	0,147966	47,35
s ₄	352	248,08	61543,6864	0,000016	0,130032	45,77
s ₅	308	327,38	107177,6644	0,000009	0,074667	23,00
s ₆	302	340,79	116137,8241	0,000009	0,068906	20,81
s ₇	363	427,61	182850,3121	0,000005	0,043766	15,89
s ₈	370	461,21	212714,6641	0,000005	0,037621	13,92
s ₉	290	450,81	203229,6561	0,000005	0,039377	11,42
s ₁₀	367	501,95	251953,8025	0,000004	0,031762	11,66
s ₁₁	335	501,48	251482,1904	0,000004	0,031822	10,66
s ₁₂	358	552,17	304891,7089	0,000003	0,026247	9,40
Σ				0,000125		341,76

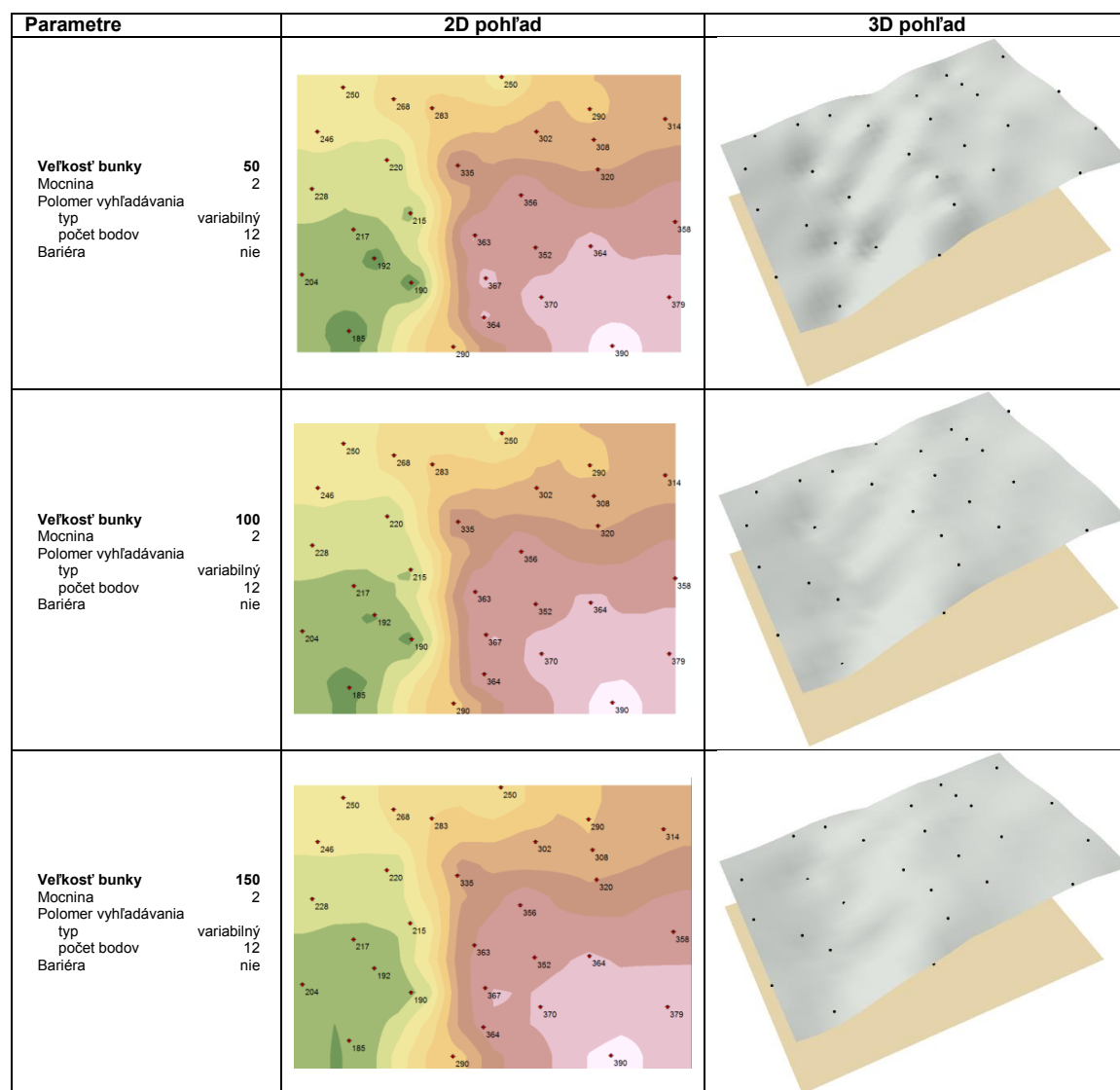
Tab. 6.2 Ukážka výpočtu odhadu hodnoty v bode s_0 na základe bodov s_1 až s_{12} metódou IDW, kde mocninový parameter p je 2.

Výsledok odhadu hodnôt prostredníctvom metódy IDW môže byť ovplyvnený aj ďalšími parametrami:

1. veľkosťou bunky rastra (*output cell size*),
2. mocninovým parametrom (*power*),
3. polomerom vyhľadávania (*search radius*),
4. bariérou (*barriers*).

1. Veľkosť bunky rastra

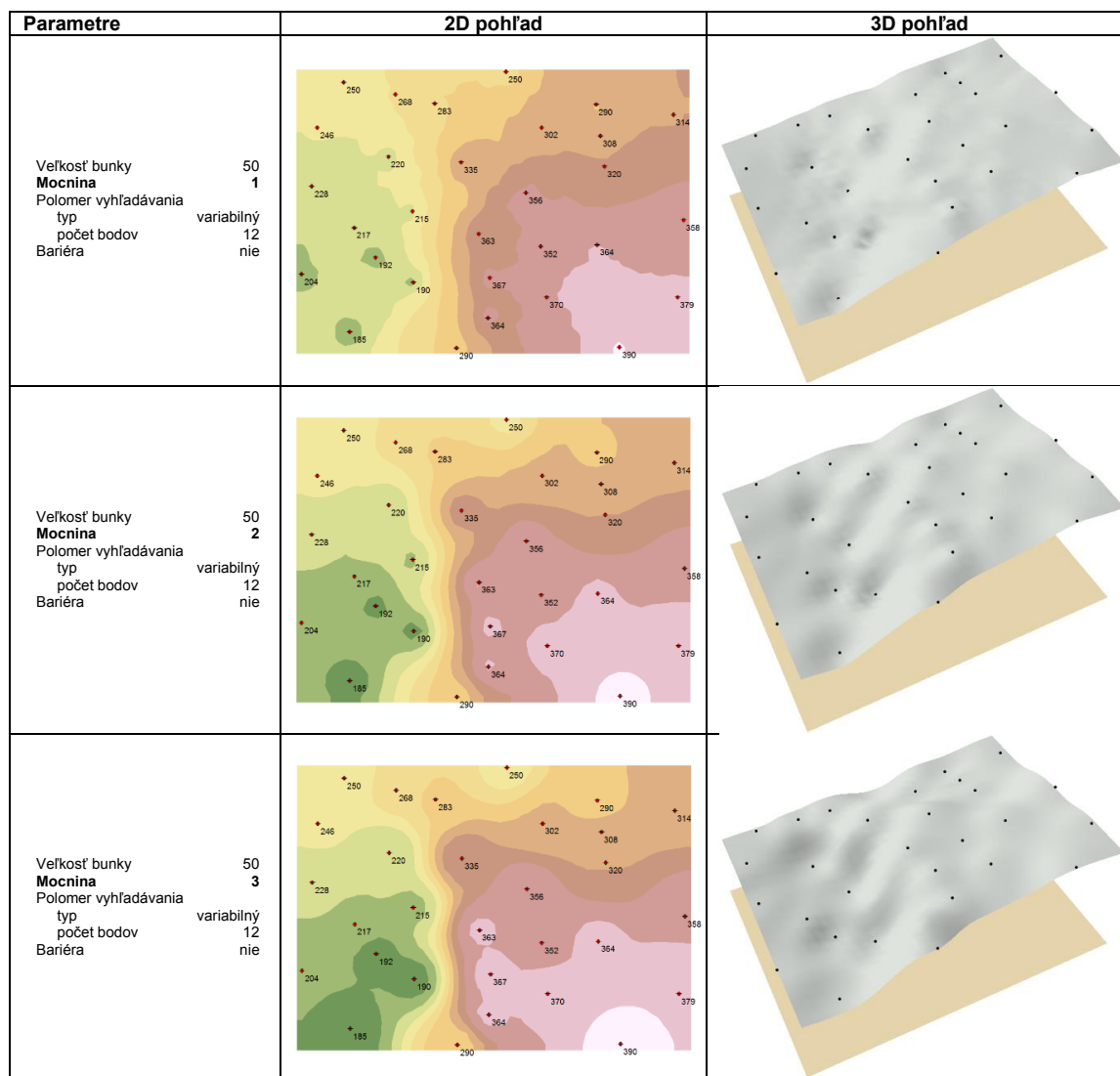
Nastavenie veľkosti bunky rastra ovplyvňuje všetky interpolačné funkcie. Čím je veľkosť bunky väčšia, tým je povrch spravidla hladší, resp. viac generalizovaný. V prípade interpolačnej metódy IDW sa však odporúča používať nižšie rozlíšenie rastra, aby hustota vstupných bodov bola vyššia ako hustota buniek v rastri (Neteler a Mitasova, 2004). Inými slovami by sme mohli povedať, že metódu IDW nie je vhodné používať pre riedke bodové pole s malými hodnotami veľkosti bunky rastra, pretože výsledok interpolácie nezodpovedá reálnemu priebehu modelovaného javu (obr. 6.34).



Obr. 6.34 Vplyv zmeny veľkosti bunky na interpolovaný povrch pomocou metódy IDW

2. Mocninový parameter

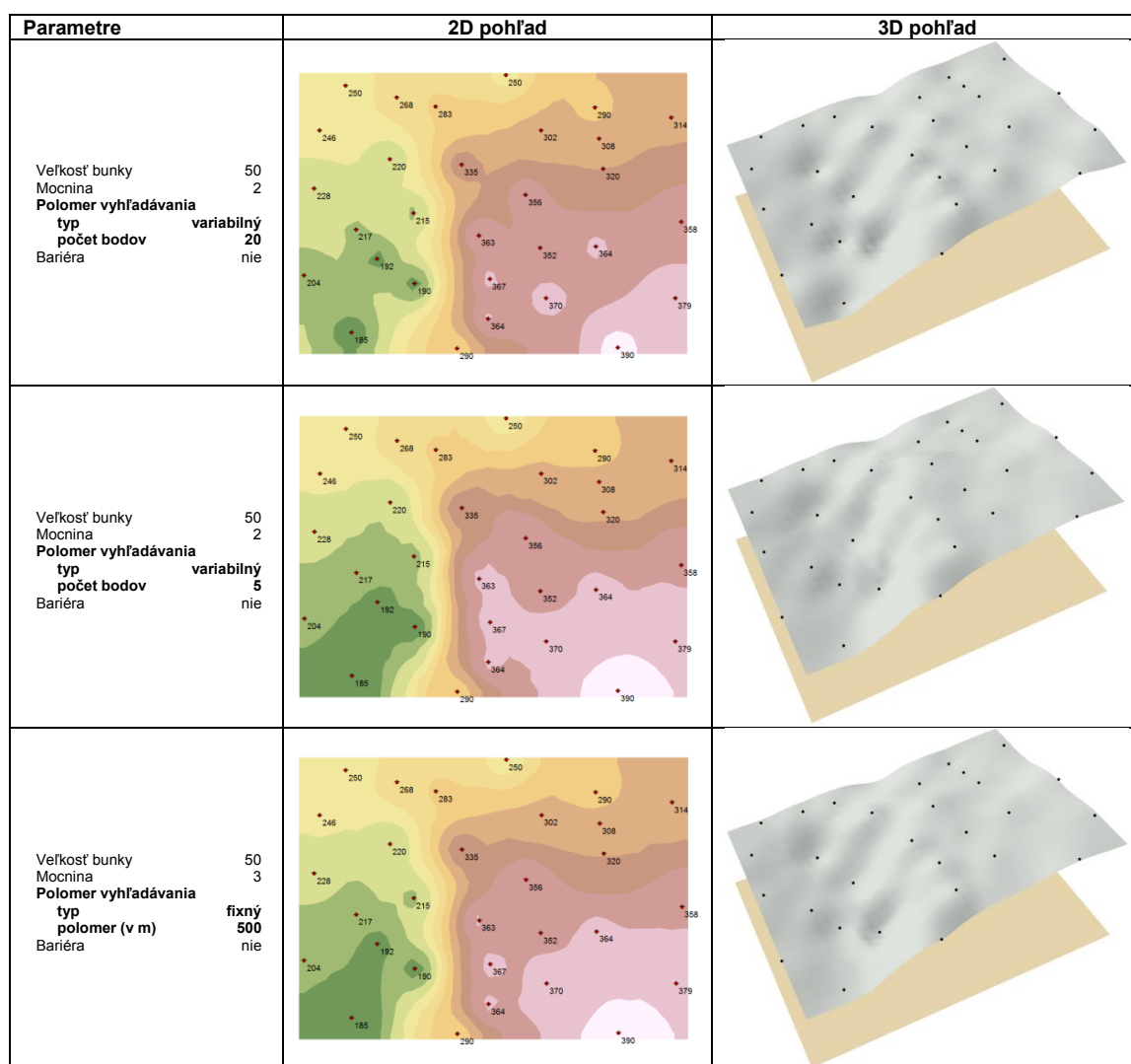
Dôležitú úlohu pri určovaní váhy má mocninový parameter p . Čím je hodnota mocninového parametra p nižšia, tým podobnejšie váhy sú priradené meraným bodov. Čím je však hodnota mocninového parametra p vyššia, tým majú bližšie body vyššiu váhu a vzdialenejšie body nižšiu váhu, teda váhy sú rozdielnejšie, čiže výsledná hodnota $z(s_0)$ sa viac približuje najbližším susedom. Ak by bola hodnota mocninového parametra p rovná 0, tak všetky váhy budú mať hodnotu 1 (teda budú rovnaké) bez ohľadu na rozloženie zdrojových údajov, pričom odhad bude zodpovedať aritmetickému priemeru hodnôt. Hlásny (2007) uvádza, že takýto prípad zodpovedá absencii akejkoľvek priestorovej štruktúry, alebo tiež modelu nugetového efektu (*nugget effect*) v geoštatistike alebo bieleho šumu (*white noise*) v geofyzike. Hodnota mocniny sa odporúča voliť z intervalu od 0,5 do 3. Najčastejšie sa používa mocnina 2, ktorá je vo spravidla štandardne prednastavená (obr. 6.35).



Obr. 6.35 Vplyv zmeny mocninového parametra na interpolovaný povrch pomocou metódy IDW

3. Polomer vyhľadávania

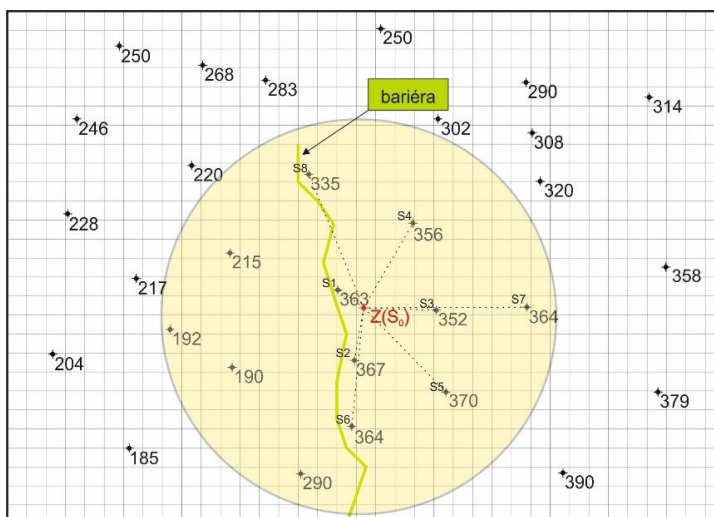
Nastavenie polomeru vyhľadávania obmedzuje počet vstupných bodov, z ktorých je počítaný odhad určovaného bodu. Polomer môže byť fixný (*fixed*) alebo variabilný (*variable*). Pri fixnom polomere je potrebné zadať rozmer, ktorý sa vzťahuje na polomer kruhu okolo bodu, pre ktorý chceme odhadnúť hodnotu. Následne sa v ploche kruhu hľadajú body, ktorých hodnoty sa vážia na základe vyššie uvedeného vzorca. Aby sa zamedzilo odhadu z malého počtu bodov v miestach, kde je bodové pole riedke, je potrebné zadať aj parameter minimálneho počtu bodov. To znamená, že najskôr sa vytvorí kruh okolo určovaného bodu podľa zadaného polomeru a ak v ňom nie je minimálny počet vstupných bodov, kruh sa rozširuje dovtedy, kým nie je zabezpečený minimálny počet vstupných bodov. Pre variabilný polomer sa definuje počet vstupných bodov. To znamená, že polomer kruhu je pre každý určovaný bod rozdielny. Aby sa predišlo váženiu hodnôt zo vzdialenosti, ktoré nemajú vplyv na interpolovaný bod, je možné zadať maximálnu vzdialenosť polomeru. Pre stanovenie výberu vhodnej metódy pre polomer vyhľadávania platí pravidlo, že ak je veľký počet vstupných bodov rozmiestnených pravidelne, odporúča sa používať fixný polomer. Ak sú body vstupného bodového poľa distribuované v priestore nehomogénne, odporúča sa používať variabilný polomer (Gallay, 2013, obr. 6.35).



Obr. 6.36 Vplyv zmeny polomeru vyhľadávania na interpolovaný povrch pomocou metódy IDW

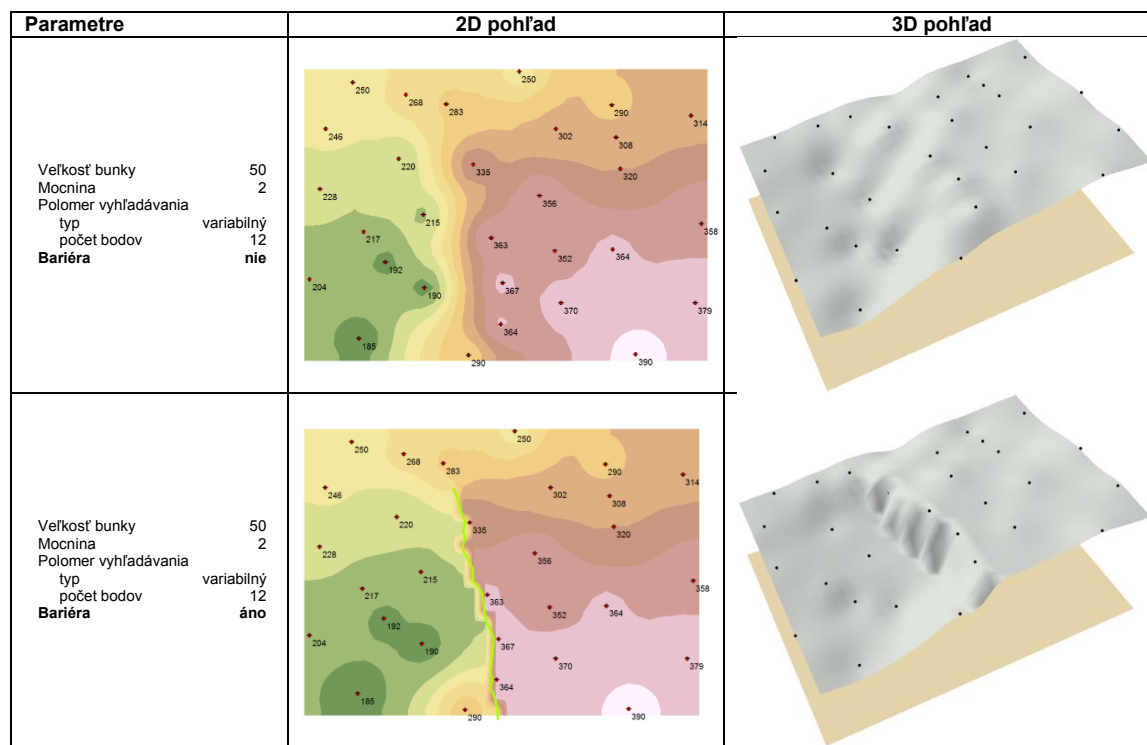
4. Bariéra

Aj v prípade metódy IDW je možné vložiť do výpočtu bariéru. Bariéra je definovaná ako líniový objekt, ktorý funguje ako zlom, ktorým sa obmedzuje priestor pre hľadanie vstupných bodov. (obr. 6.37). Línie môžu reprezentovať určitú hranu (analógia breaklines v prípade TIN), ktorá vyjadruje diskontinuitu v údajovej štruktúre. V prípade terénu to môže byť útes, prípade hrebeň pohoria a pod.



Obr. 6.37 Vstupné bodové pole s hodnotami nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom. V údajovom poli je vložená línia, ktorá reprezentuje bariéru (zelená farba). Do výpočtu odhadu v bode s_0 sa budú brať do úvahy iba hodnoty v bodoch s_1 až s_8 , aj napriek tomu, že v kruhu vyhľadávania zobrazeného oranžovou farbou sa nachádzajú aj iné vstupné body. Tieto vstupné body sa však nachádzajú za bariérou, preto ich hodnoty nemajú vplyv na výsledok.

Na obr. 6.38 demonštrujeme vplyv bariéry na testovacie bodové pole pri odhade hodnôt v rastrovej dátovej štruktúre.



Obr. 6.38 Vplyv bariéry na interpolovaný povrch pomocou metódy IDW

Jedným z hlavných nedostatkov metódy IDW je, že na vytvorenom povrchu je možné pozorovať tzv. „bull’s eyes“ efekt. V slovenskej odbornej terminológii sa používa pojem „vybúlenie“. Ide o útvary, ktoré vytvárajú okrúhle doliny (podobne ako v krase závrty), alebo okrúhle vrcholy (napr. tvrdoše vo flyši). Dôvodom ich vzniku sú silné relatívne váhy hodnôt nachádzajúcich sa v ich blízkosti, alebo aj vyššie voľby mocninového parametru. Takéto útvary v dátovej štruktúre reprezentujú neprirodzené tvary. Existujú aj postupy, ktorými sa tieto útvary zhladzujú pomocou tzv. zhladzovacieho parametra (*smoothing parameter*). Pri jeho použití sa metóda IDW mení na aproximujúcu interpoláciu, nakoľko výsledný povrch neprechádza bodmi zo vstupného bodového poľa, ale sa nachádza v ich blízkosti. Ďalším nedostatkom metódy IDW je, že nedokáže vypočítať vyššie alebo nižšie hodnoty, ako sú hodnoty vstupného bodového poľa. Problém môže nastať v situáciách, kedy nie sú dostupné extrémne hodnoty sledovaného javu. V prípade reliéfu to môže byť dno doliny, vrchol pohoria a podobne.

6.8 Metóda trendového povrchu

Interpoláčna metóda trendového povrchu patrí medzi aproximačné metódy, čo znamená, že výsledná funkcia neprechádza zadanými bodmi, ale sa nachádza v ich blízkosti. Aplikácia tejto metódy pre analýzu sledovaného javu predpokladá normálne rozdelenie jeho hodnôt. Cieľom tejto metódy je aproximovať priebeh sledovaného javu pomocou polynomickej funkcie metódou najmenších štvorcov. Metóda trendového povrchu nerešpektuje priestorovú autokoreláciu, iba sa snažia prechádzať čo najbližšie zadanými bodmi. Hovoríme, že ide o minimalizáciu aproximačnej funkcie.

Ak použijeme túto metódu na všetky body vstupného bodového poľa, výsledkom bude globálna analýza priebehu zmeny sledovaného javu vo všetkých smeroch, na základe čoho vieme povedať, či sledovaný jav má tendenciu stúpať alebo klesať. Ak sa rozhodneme použiť metódu trendového povrchu na obmedzené množstvo vstupného bodového poľa, ide o lokálnu (regionálnu) analýzu zmeny sledovaného javu. Lokálny prístup sa často využíva aj v iných interpolačných postupoch, napr. splajnoch. Význam tejto metódy však spočíva aj v tom, že je súčasťou iných interpolačných metód. Hlásny (2007) uvádza, že funkcie, pomocou ktorých je možné odhadovať priebeh sledovaných javov, je možné rozdeliť na trendovú časť (deterministickú) a náhodnú časť (stochastickú). Trendová funkcia je vyjadrená polynomicou funkciou určitého rádu. Jej všeobecný zápis by sme mohli vyjadriť nasledovne:

$$T(m) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_mx^{m-1} + c_{m+1}x^m \quad (6.21)$$

Trendový povrch určený polynómom vyššieho rádu však vykazuje značné chyby na okrajových pozíciách sledovaného javu (*edge effects*).

Pre dvojrozmerný priestor je potrebné do rovnice zakomponovať obe súradnice x a y .

Najjednoduchšia forma polynomickej funkcie je funkcia prvého rádu, ktorú označujeme ako lineárny trend $T(1)$ (obr. 6.39) a môžeme ju vyjadriť nasledovne:

$$T(1) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (6.22)$$

kde

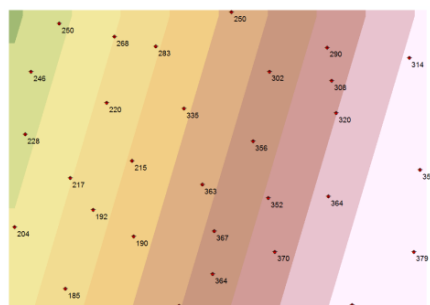
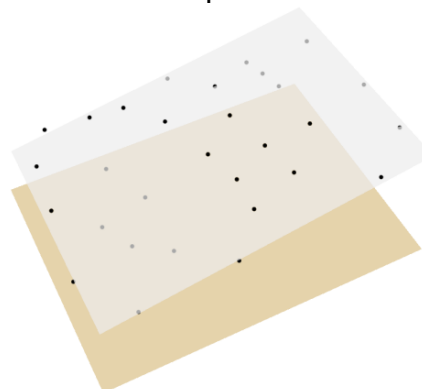
c_1, c_2, c_3 sú koeficienty chýb.

Chyby

coef # coef

1 181.754599966162
 2 0.0947529006546955
 3 -0.0280793391721109

RMS Error = 40.6461319654569

2D pohľad**3D pohľad**

Obr. 6.39 **Lineárny trend**. V stĺpci s názvom chyby sú uvedené vypočítané chyby koeficientov, ako aj RMS chyba. Na 3D pohľade je modelovaný povrch priehľadný, aby bolo možné sledovať, ktoré body vstupného bodového poľa sa nachádzajú nad (tmavšie body) alebo pod (svetlejšie body) modelovaným povrchom. Rovnaký prístup je použitý aj pri nasledujúcich obrázkoch reprezentujúcich vyššie rady polynomickej funkcie.

Polynomická funkcia druhého rádu sa označuje ako kvadratický trend $T(2)$ (obr. 6.40):

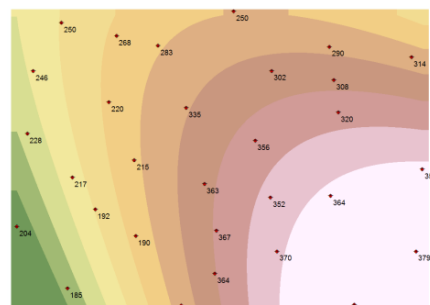
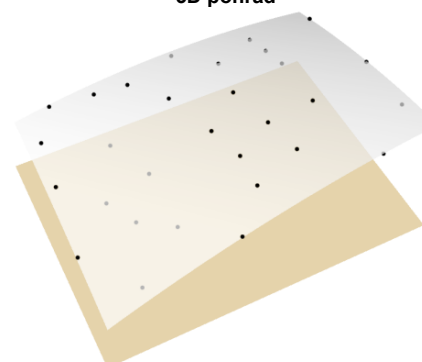
$$T(2) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 \quad (6.23)$$

Chyby

coef # coef

1 206.110710208105
 2 0.121950703599808
 3 0.0219544979199638
 4 -5.74442183891761e-005
 5 -0.000125116275482547
 6 -5.04551201767515e-005

RMS Error = 30.5856426818541

2D pohľad**3D pohľad****6.40 Kvadratický trend.**

Polynomicкую funkciu tretieho rádu nazývame kubický trend $T(3)$ (obr. 6.41):

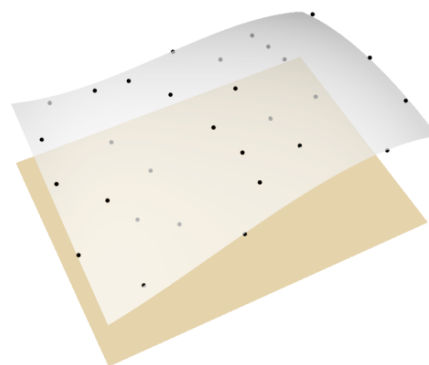
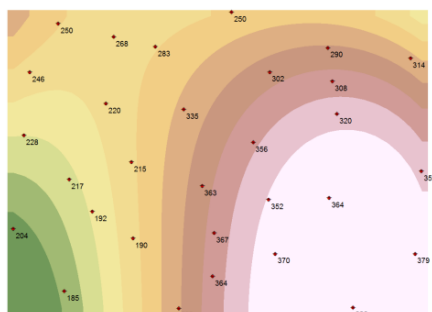
$$T(3) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 \quad (6.24)$$

Chyby**2D pohľad****3D pohľad**

coef # coef

 1 341.47820370551
 2 -0.319323277119088
 3 0.19579846667767
 4 0.000333108736456384
 5 -0.000439066527275171
 6 -1.75998721882544e-007
 7 -1.07814861016934e-007
 8 8.62508330285841e-008
 9 -9.5392719504918e-008
 10 -1.97367544209482e-008

 RMS Error = 26.5271644980927



6.41 Kubický trend.

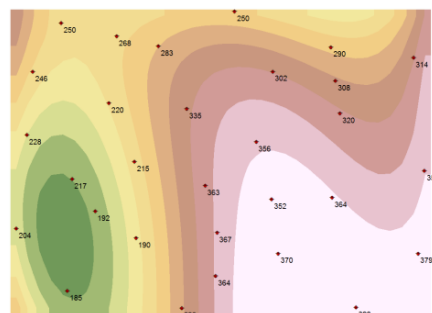
Ukážky polynomickej funkcie vyšších rádoz zobrazujú obr. 6.42, 6.43 a 6.44.

Chyby
 coef # coef

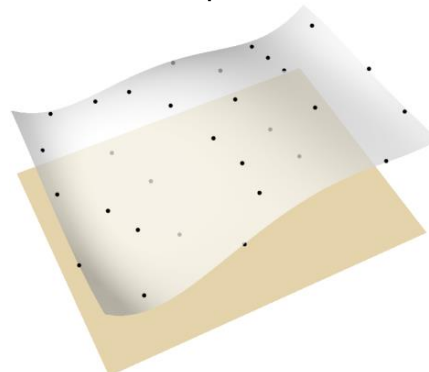
1 424.27092469146
 2 -1.040004268403
 3 0.0667974136851691
 4 0.00192042160163845
 5 -0.000465018266484138
 6 -0.000392607666886056
 7 -1.44116020798506e-006
 8 -2.44911511859783e-007
 9 -4.52881813042744e-007
 10 -4.42683670287663e-007
 11 3.70264786685444e-010
 12 2.2091940977639e-010
 13 2.48388824850879e-010
 14 6.78175650169124e-011
 15 -8.79102833539786e-011

 RMS Error = 17.515883311415

2D pohľad



3D pohľad



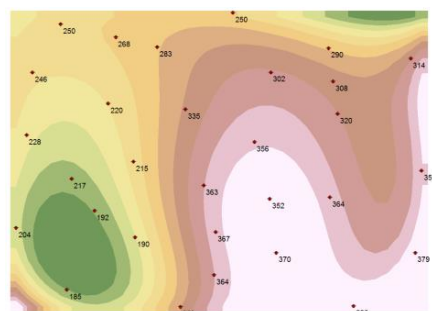
6.42 Polynomická (trendová) funkcia štvrtého rádu.

Chyby
 coef # coef

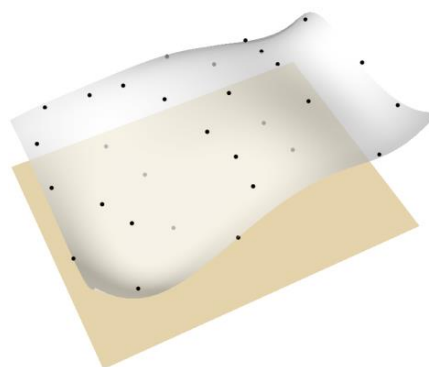
1 133.233577436905
 2 0.641359234035414
 3 -0.691823210940812
 4 -0.0014926203414816
 5 0.00229520621373146
 6 -0.00161551814180839
 7 1.76266631461919e-006
 8 -3.89197145841187e-006
 9 9.71933214884266e-007
 10 -2.47055505208718e-006
 11 -1.07050105743021e-009
 12 1.94861245074087e-009
 13 -1.71641739967596e-009
 14 -5.12108854857561e-010
 15 -2.21165035805169e-009
 16 2.39184509194406e-013
 17 -4.10115662807863e-013
 18 2.81899897244346e-014
 19 -8.70608436868292e-013
 20 -7.56227672244295e-013
 21 -8.37924462809244e-013

 RMS Error = 16.2168446132301

2D pohľad



3D pohľad



6.43 Polynomická (trendová) funkcia piateho rádu.

Chyby

2D pohľad

3D pohľad

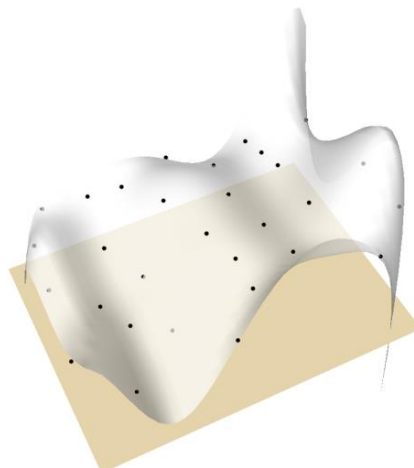
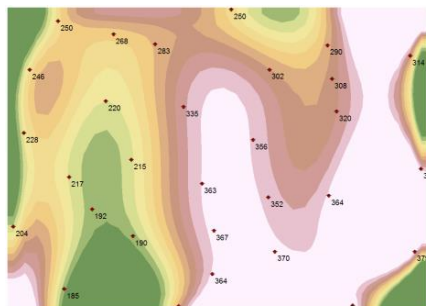
coef # coef

```

1 -1931.01874027751
2 16.1558997302735
3 -5.32348863967703
4 -0.0454229379931584
5 0.0332589452577414
6 5.65120262163074e-005
7 6.89364630116345e-005
8 -4.39225045477524e-005
9 4.86452330732748e-005
10 2.36657404784384e-005
11 -5.85728958873168e-008
12 1.81852829770539e-008
13 -6.15500905678327e-008
14 2.25208091520905e-008
15 3.72797533744765e-008
16 2.55359604824765e-011
17 -4.69592256322673e-013
18 2.34749080212935e-011
19 -3.03718476255047e-011
20 -3.13772153983915e-012
21 2.23530523876764e-011
22 -4.37000121005172e-015
23 -4.75605966867421e-016
24 -1.38535171216787e-015
25 8.86683520868541e-015
26 -2.36532698118774e-015
27 -2.43504517157736e-015
28 4.87466488229872e-015

```

RMS Error = 0.659706577514424



6.44 Polynomická (trendová) funkcia šiesteho rádu.

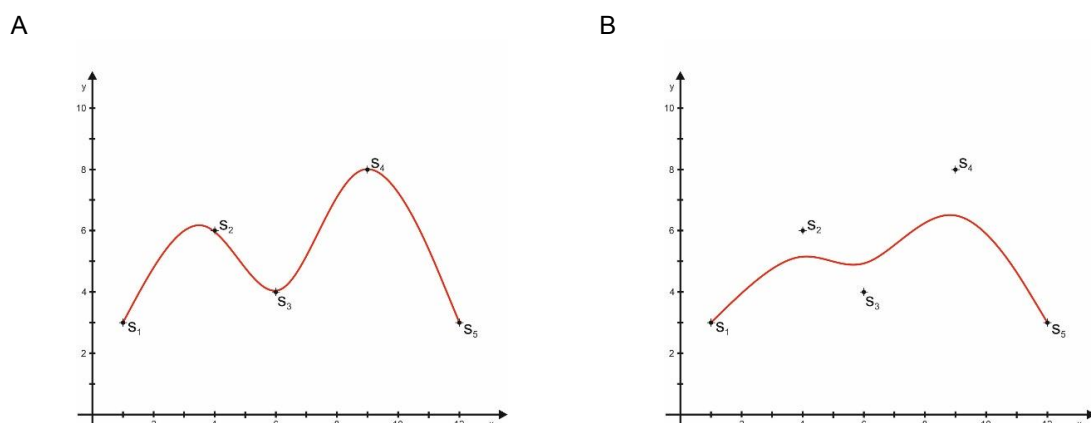
Z uvedených príkladov vyplýva, že síce RMS klesá s vyšším rádom polynomickej funkcie, avšak zároveň si môžeme všimnúť, že funkcia veľmi kmitá hlavne na okrajoch bodového poľa, kde aproximácia hodnôt je nereálna. Na druhej strane v strede bodového poľa môžeme pozorovať, že pomocou polynomickej funkcie vyššieho rádu dostávame veľmi hladký povrch. Pri polynomickej funkcii šiesteho rádu je fluktuácia hodnôt bodového poľa už veľmi veľká v celom rozsahu dát, aj keď RMS je najnižšia, nakoľko funkcia prechádza v blízkosti bodov vstupného bodového poľa. Interpretácia aproximovaného povrchu trendovými polynomickými funkciami vyššieho rádu je veľmi zložitá. Pri nižších rádoch ešte môžeme interpretovať tendenciu sledovaného javu z hľadiska priebehu funkcie vo všetkých smeroch, t.j. či povrch má tendenciu stúpať, alebo klesať. Pri vyšších rádoch je to pomerne komplikované. Zároveň s vyšším rádom polynomickej funkcie stúpa aj náročnosť výpočtu, nakoľko rastie počet premenných, a tým aj počet sústavy rovníc.

Ak chceme metódu trendového povrchu aplikovať pre odhad priebehu hodnôt bodového poľa, je vhodnejšie používať lokálny prístup, nakoľko pri použití jednej funkcie na celý rozsah vstupného bodového poľa (globálny prístup) dostávame výsledky nezlučiteľné s reálnym priebehom hodnôt (pri vysokom kmitaní funkcie dostávame nereálne výsledky, napr. pri modelovaní teploty by sme mohli dostať aj záporné hodnoty, podobne aj v prípade nadmorskej výšky).

6.9 Metóda multivariačného modelovanie pomocou splajnu

Interpolácia má v geovedách a ich aplikáciách významné miesto. Veľká časť interpolačných funkcií je založená na vopred známych matematických funkciách, ktoré vychádzajú z určitých znalostí o správaní sa sledovaného geopriestorového javu. Napríklad pri interpolačnej funkcii IDW vieme vopred, akú funkciu použijeme na odhad hodnôt. Následne pomocou definovaných funkcií vypočítavame hodnoty v bode s_0 (neznáme body). Ich výpočet je pomerne jednoduchý, nakoľko výsledok dostaneme po dosadení požadovaných parametrov do definovaných vzorcov, ktoré sú vyjadrené matematickými vzťahmi (funkciami). Na odhad hodnôt geopriestorových javov sa však môžeme pozeráť aj iným spôsobom, a to tak, že nevieme, aká matematická funkcia ich vyjadruje, avšak vieme akými hodnotami v určitých bodoch funkcia prechádza, resp. máme k dispozícii iba fragmenty jej priebehu, t. j. bodové pole hodnôt a pokúšame sa odhadnúť priebeh funkcie. Splajn patrí medzi interpolačné metódy, ktoré sa snažia nájsť takú funkciu, aby vhodne reprezentovala sledovaný jav. Aj splajnové metódy vychádzajú z predpokladu, že modelovaný jav je priestorovo autokorelovaný. Dôležité tiež je nájsť takú funkciu, pre ktorú vieme určiť derivácie vo vybraných bodoch, čo nám napríklad v prípade georeliéfu umožňuje výpočet morfometrických parametrov na základe jej parciálnych derivácií. Splajny predstavujú veľmi robustnú metódu založenú na odhade hodnôt

pomocou polynomických funkcií, ktorá si však vyžaduje hlbšie znalosti o vplyve jej parametrov na výsledok Hofierka (1997). Slovo „splajn“ pochádza z anglického slova „spline“. Zjednodušene by sme mohli povedať, že splajnové funkcie simulujú správanie sa tenkej elastickej platne, ktorá sa snaží prechádzať bodmi vstupného bodového poľa. Každá časť povrchu je vyjadrená samostatnou polynomicou funkciou. Táto polynomická funkcia je odvodená z lokálnych hodnôt vstupného bodového poľa, pričom jej priebeh je ovplyvnený viacerými podmienkami. Základnou podmienkou je, aby bola zabezpečená spojitosť susedných polynomických funkcií v bodoch vstupného bodového poľa. Týchto podmienok môže byť viacero v závislosti od triedy polynomickej funkcie (napr. v prípade kubickej polynomickej funkcie je definovaná podmienka zhody prvej a druhej derivácie). Výsledkom je hladký povrch (obr. 6.45).



Obr. 6.45 Náčrt priebehu (A) exaktnej a (B) aproximujúcej funkcie definovanej bodmi s_1 až s_5 zobrazuje hladký (plynulý) prechod medzi zadanými bodmi.

Splajnové metódy sú náročné na odvodenie a na výpočet. Pre odvodenie splajnu pre geopriestorové aplikácie je možné siahnuť po množstve odborných publikácií napr. Mitáš a Mitašová (1988), Talmi a Gilat (1977), Wahba (1990), Mitašová a Mitáš (1993), Mitašová a Hofierka (1993), Mitasová et al., (1995), Hofierka et al (2002), Hofierka (2005), Cebecauer et al. (2002), Mitašová et al. (2005) a ďalší. Aby sme vedeli správne aplikovať splajnové metódy, pokúsime sa aspoň čiastočne vysvetliť fyzikálno-matematický princíp a uvedieme vybrané parametre funkcie splajnu, ktoré majú vplyv na modelovaný povrch. Splajny predstavuje veľmi vhodnú metódu na tvorbu spojitých povrchov s priestorovo autokorelovanou osciláciou hodnôt medzi zadanými bodmi (bez výrazných diskontinuit). Pomocou splajnov vieme vytvoriť hladký povrch vhodný napr. pre reprezentáciu nadmorských výšok bez výrazných hrán, výšok hladiny podzemnej vody, alebo koncentrácií znečistenia a pod. Základný princíp splajnu pre modelovanie povrchov (spojitých javov) z priestorovo distribuovaných dát je založený na fyzikálnom modeli tenkej elastickej membrány, ktorú sa snažíme preložiť cez body vstupného bodového poľa pomocou definovania podmienok pre ohybnosť funkcie, tzv. tenziu (*tension parameter*) a hladkosť výsledného povrchu (*smooth parameter*). Splajnové metódy sú založené na predpoklade, že interpolačná funkcia:

- prechádza najbližšie ako je len možné bodmi vstupného bodového poľa
- a zároveň
- funkcia je najviac hladká, ako len je to možné.

Obe uvedené podmienky by mali byť súčasne splnené pre každý bod vstupného bodového poľa. Tieto podmienky by sme mohli vyjadriť aj tak, že hľadáme funkciu, pre ktorú platí, že:

- súčet odchýlok od bodov vstupného bodového poľa je minimálny
- a zároveň

- pre hladkosť funkcie platí nasledovné

Daných je N počet sledovaných javov $z^j, j = 1, \dots, N$ meraných v konkrétnych bodoch $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_d^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$ v rámci istého regiónu d – dimenzionálneho priestoru a hľadáme funkciu $S(x)$, ktorá spĺňa podmienku:

$$\sum_{j=1}^N |z^j - S(x^j)|^2 w_j + w_0 I(S) = \text{minimum} \quad (6.25)$$

kde

w_j a w_0 sú pozitívne váhové faktory;

$I(S)$ je seminorma hladkosti (smooth seminorm).

Riešenie tohto problému by sme mohli vyjadriť ako sumu dvoch komponentov.

$$S(x) = T(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(x, x^{(i)}) \quad (6.26)$$

kde

$T(x)$ je 'trendová' funkcia

$R(x, x^{(i)})$ je základná radiálna funkcia v explicitnej forme, ktorá je závislá na voľbe $I(S)$.

Mitášová a Mitáš (1993) uvádzajú, že ak by bola 'trendová' funkcia $T(x)$ konštantná, tak by platilo:

$$T(x) = a_1 \quad (6.27)$$

pre ľubovoľný d – dimenzionálny priestor. Všeobecný zápis základnej radiálnej funkcie pre d – rôznych prípadov by bol určený nasledovne:

$$R_d(x, x^{[j]}) = R_d(|x - x^{[j]}|) = R_d(r) = \rho^{-\delta} \gamma(\delta, \rho) - \frac{1}{\delta} \quad (6.28)$$

kde

$\delta = (d - 2)/2$ (δ - čítaj delta);

$\rho = \left(\frac{\varphi r}{2}\right)^2$ (ρ - čítaj rho)

φ – všeobecný výraz pre parameter tenzie (φ - čítaj phi)

$$r^2 = \sum_{i=1}^d (x_i - x_i^{[j]})^2 \quad (6.28)$$

$\gamma(\delta, \rho)$ (γ - čítaj gama) je neúplná gama funkcia (je riešením problému týkajúceho sa hľadania hladkej krivky, ktorá spája ľubovoľné body δ a ρ , pričom všeobecný zápis jej funkcie je $\gamma(\delta, \rho) = \int_0^\rho t^{\delta-1} e^{-t} dt$).

Pre špeciálne prípady sú odvodené nasledujúce funkcie:

$d = 2$

$$R_2(r) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\rho^{-\delta} \gamma(\delta, \rho) - \frac{1}{\delta} \right] = -\frac{\varphi^2}{4\pi} \left\{ E_1 \left[\left(\frac{\varphi r}{2} \right)^2 \right] + \ln \left[\left(\frac{\varphi r}{2} \right)^2 \right] + C_E \right\} = -[E_1(\rho) + \ln \rho + C_E] \quad (6.29)$$

Multiplikačná konštanta $\frac{\varphi^2}{4\pi}$ môže byť vynechaná nakoľko je obsiahnutá v koeficiente $\{\lambda_1\}$, podobne to platí aj pre nasledujúce prípady.

$d = 3$

$$R_3(r) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \operatorname{erf}(\sqrt{\rho}) - 2 \quad (6.30)$$

$d = 4$

$$R_4(r) = \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho} - 1 \quad (6.31)$$

kde

$C_E = 0,577215$ ide o Eulerovu konštantu (pozn. - pozor, nie Eulerovo číslo!),

E_1 - integrál exponenciálnej funkcie

erf (error function) - chyba funkcie

Koeficienty a_1 , $\{\lambda_1\}$ sú získané riešením nasledujúceho systému lineárnych rovníc:

$$a_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_1 [R(x^i, x^j) + \delta_{ji} w_0 / w_j] = z^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.32)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_1 = 0 \quad (6.33)$$

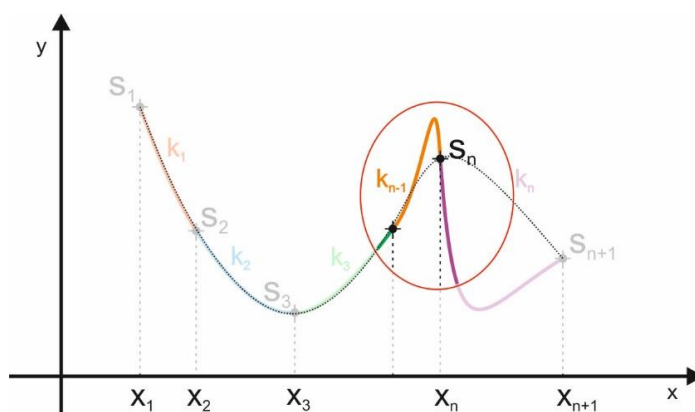
Takto odvodené funkcie majú viaceré užitočné vlastnosti. Je možné určiť derivácie všetkých rádov, čo je veľmi dôležité pre analýzu geometrie povrchu resp. viacrozmerných povrchov (tzv. hyperpovrchov).

Parameter tenzie φ kontroluje vzdialenosť, cez ktorú daný bod vplýva na výsledný povrch. Optimálne nastavenie tohto parametra by sme si mohli predstaviť ako ladenie charakteru výsledného povrchu medzi membránou a tenkou doskou.

Ak predpokladáme, že parameter zhladenia (*smooth parameter*) bude rovnaký pre všetky body, potom platí

$$w = w_j / w_0 \quad (6.34)$$

Nastavenie správnych parametrov φ a w je veľmi dôležité z hľadiska dosiahnutia optimálneho povrchu. Metóda splajnu zabezpečuje, že povrch je hladký aj v jeho prvej derivácii (sklon). Problémom nastáva najmä v prípadoch nehomogénneho rozmiestnenia vstupného bodového poľa pri prechodoch medzi miestami s vysokou koncentráciou bodov a riedkym bodovým poľom, alebo na miestach náhle zmeny priebehu hodnôt z_0 , kde dochádza ku veľkým zmenám gradientu prvej derivácie (sklonu). Z tohto dôvodu nie je možné odvodzovať ani druhú deriváciu (vzťahuje sa na krivosti povrchu) v týchto častiach povrchu. Takéto povrchy sú síce hladké, ale v určitých miestach nereprezentujú vhodne modelovaný jav, nakoľko sa v povrchoch objavujú tzv. interpolačné artefakty, ktoré vznikli v dôsledku použitej interpolačnej funkcie (obr.6.46). Zjednodušene by sme mohli povedať, že funkcia si prechádza zadaným bodom až vtedy, keď v istom momente začne naberať správny smer k nadchádzajúcemu bodu.



Obr. 6.46 Náčrt interpolačného artefaktu, ku ktorému došlo pri náhlej zmene priebehu funkcií v blízkosti bodu s_n .

Sú navrhnuté 2 odlišné typy splajnových funkcií :

- a) **regularizovaný splajn (regularized spline)** – vytvára hladký a odporúča sa využívať v prípadoch, kedy je potrebné vypočítať druhú deriváciu. Pomocou tejto metódy dostávame povrch postupne sa meniacich hodnôt, ktoré môžu ležať aj mimo rozsahu hodnôt vstupného bodového poľa. Pre regularizovaný splajn platí, že:

$$T(s_0) = a_1 + a_2x_0 + a_3y_0 \quad (6.35)$$

kde

a_i sú koeficienty určené pomocou riešenia systému lineárnych funkcií

a

$$R(d_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{d_0^2}{4} \left[\ln \left(\frac{d_0}{2\tau} \right) + c - 1 \right] + \tau^2 \left[K_0 \left(\frac{d_0}{\tau} \right) + c + \ln \left(\frac{d_0}{2\pi} \right) \right] \right\} \quad (6.36)$$

kde

d_0 je vzdialenosť medzi bodom s_0 so súradnicami $[x_0, y_0]$ a bodom s_i so súradnicami $[x_i, y_i]$

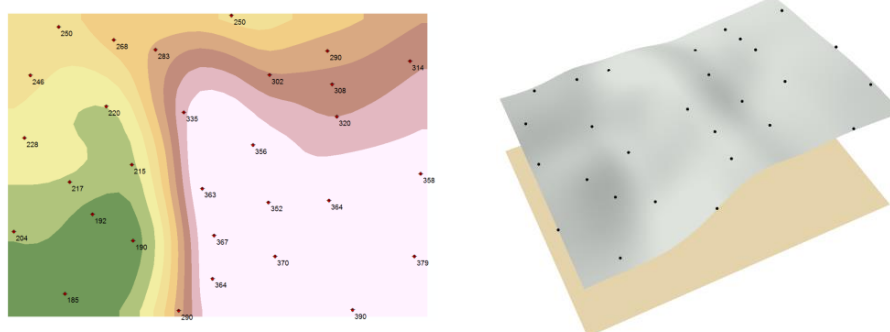
τ (čítaj tau) je váhový parameter, určuje váhu priradenú tretej derivácii odvodenéj z povrchu určeného funkciou, ktorou sa snažíme zabezpečiť podmienku minimálneho zakrivenia povrchu. Vyššie hodnoty tohto parametra budú viesť ku menšej krivosti, resp. ku hladšiemu povrchu. Hodnota zvolená pre tento parameter musí byť rovná alebo väčšia ako 0. Pre ukážku vplyvu tohto parametra na modelovaný povrch použijeme výrazne odlišné hodnoty (0.1, 5, 100)

K_0 je modifikovaná Besselova funkcia.

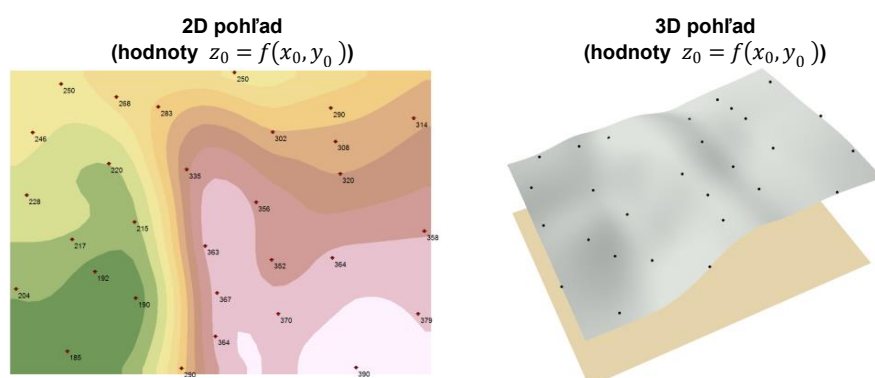
c je Eulerova konštanta rovná hodnote 0,577215.

2D pohľad
(hodnoty $z_0 = f(x_0, y_0)$)

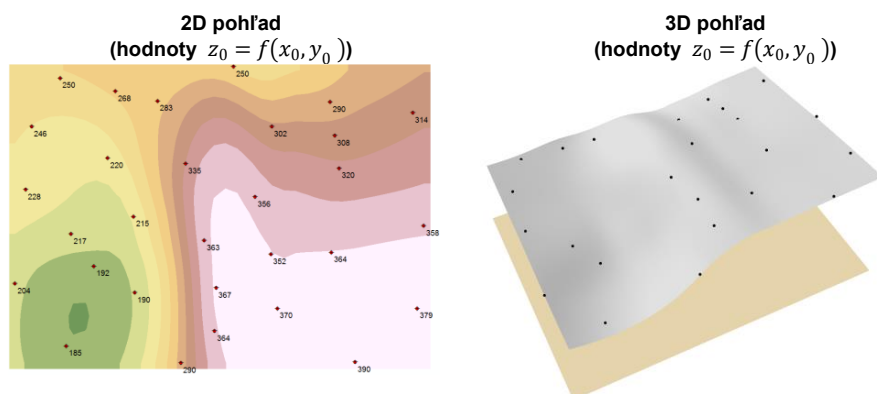
3D pohľad
(hodnoty $z_0 = f(x_0, y_0)$)



Obr. 6.47 Veľkosť bunky = 50; typ splajnu = regularizovaný; **váhový parameter $\tau = 0,1$** ; počet bodov = 12



Obr. 6.48 Veľkosť bunky = 50; typ splajnu = regularizovaný; **váhový parameter $\tau = 5$** ; počet bodov = 12



Obr. 6.50 Veľkosť bunky = 50; typ splajnu = regularizovaný; **váhový parameter $\tau = 100$** ; počet bodov = 12

- b) **splajn s tenziou (tension spline)** – pomocou parametra tenzie (*tension*) sa kontroluje ohybnosť, resp. tuhosť (*stiffness*) membrány, ktorú imituje funkcia, čím sa vytvára menej hladký povrch s hodnotami, ktoré majú väčšiu podobnosť s rozsahom hodnôt vstupného bodového poľa. Pre splajn s tenziou platí, že:

$$T(s_0) = a_1 \quad (6.37)$$

kde

a_1 je koeficient určený pomocou riešenia systému lineárnych funkcií

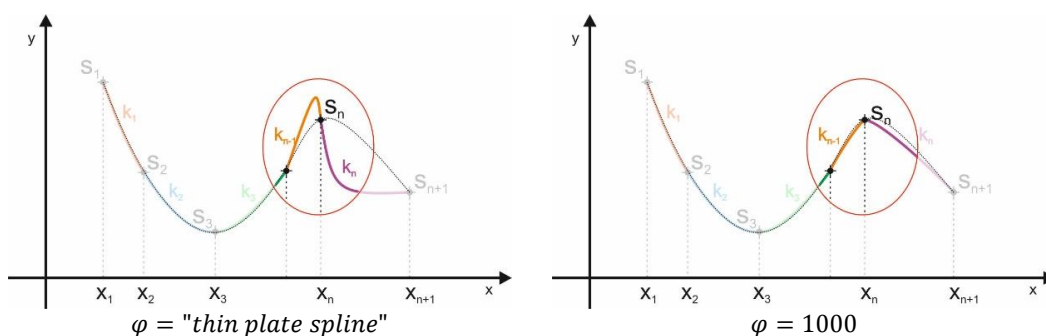
a

$$R(d_0) = -\frac{1}{2\pi\varphi^2} \left[\ln\left(\frac{d_0\varphi}{2}\right) + c + K_0(d_0\varphi) \right] \quad (6.38)$$

kde

d_0 je vzdialenosť medzi bodom s_0 so súradnicami $[x_0, y_0]$ a bodom s_i so súradnicami $[x_i, y_i]$

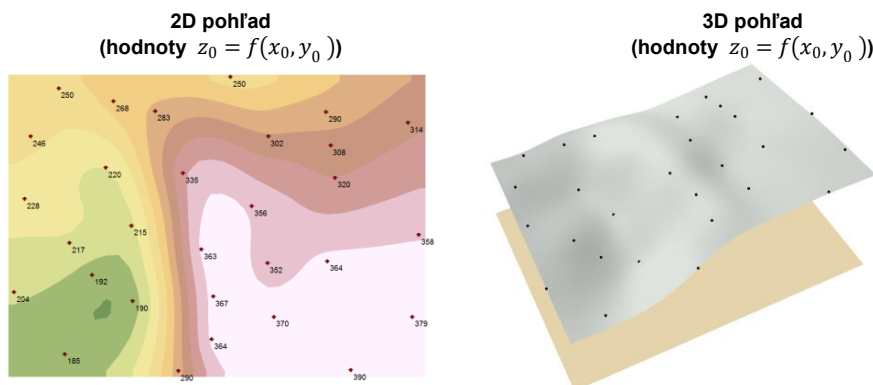
φ - (čítaj phi) je váhový parameter, určuje váhu priradenú prvej derivácii obmieňajúcu podmienku minimalizácie krivosti v bode s_0 , ak je hodnota váhy 0, ide metódu interpolácie „Thin plate spline“, čím je hodnota váhy vyššia, tým je viac redukovaná tuhosť (*stiffness*) membrány, ktorá prechádza bodmi vstupného bodového poľa. Ak sa hodnota tohto parametra blíži k limite funkcii v nekonečne, funkcia je veľmi ohybná, čiže výsledkom je síce hladký povrch a jeho prvá derivácia je spojitá, avšak nie je plynulá.



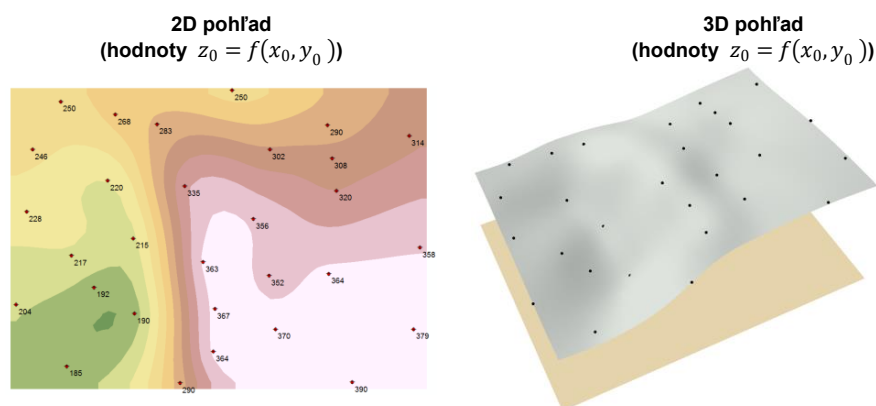
Obr. 6.51 Ukážka priebehu funkcie pre zadané hodnoty φ , čiarkovanou čiarou je znázornená optimálna krivka povrchu

K_0 je modifikovaná Besselovu funkciu.

c je Eulerova konštanta rovná hodnote 0,577215



Obr. 6.52 Veľkosť bunky = 50; typ splajnu = s tenziou; **váhový parameter** $\varphi = 0,1$; počet bodov = 12



Obr. 6.53 Veľkosť bunky = 50; typ splajnu = s tenziou; **váhový parameter** $\varphi = 5$; počet bodov = 12

Z výpočtových dôvodov je potrebné vstupné bodové pole segmentovať, preto sa v rôznych aplikáciách objavuje aj ďalšia premenná, ktorou je počet bodov v segmente. Segmentácia priestoru je rozdielne riešená v závislosti od softvéru. Nastavenie tohto parametra už závisí na konkrétnej aplikácii, čiže hodnoty sú rôzne. Napríklad v prípade programu ArcGIS je prednastavená hodnota tohto parametra 12. Segmentácia je riešená tak, že počet bodov vstupného bodového poľa sa vydolí zadaným parametrom (napr. hodnotou 12) a priestor vstupného bodového poľa sa rozdelí na rovnaké obdĺžniky (regióny). Počet regiónov v smere osi X a v smere osi Y je rovnaký. Pre nerovnomerne distribuované vstupné bodové pole môžu regióny obsahovať značne odlišný počet bodov vstupného bodového poľa, avšak v každom regióne musí byť aspoň 8 bodov. Číslo 12 neznamena, že v každom segmente bude 12 bodov. Toto by platilo iba v prípade, že počet bodov vstupného bodového poľa bol násobkom 12 a body by boli rovnomerne rozmiestnené. Zároveň však platí, že čím viac bodov zadáme, tým sú väčšie nároky na výpočtovú kapacitu počítača a výsledný povrch je viac zhladený. Uvedený postup priestorovej interpolácie pomocou splajnu je implementovaný do nadstavby (*extension*) Spatial Analyst a 3D Analyst do palety nástrojov (toolbox-u) Interpolation, resp. Raster Interpolation. Viac možností pre nastavenie parametrov splajnu poskytuje nadstavba (*extension*) Geostatistical Analyst v nástrojoch (toolbox-e) Interpolation, avšak tá si vyžaduje aj väčšie znalosti pre voľbu vhodných metód a nastavenie ich parametrov. Pre modul *v.surf.rst*, ktorý je navrhnutý pre program GRASS GIS je segmentácia riešená inak. Pre bližšie oboznámenie sa so segmentáciou v GRASSe odporúčame vychádzať z práce Neteler a Mitašová (2008), alebo Burian et al. (2015). Výsledky tvorby povrchov pomocou splajnu a vplyv parametrov na výsledný povrch pre vstupné bodové pole je možné porovnať obrázkoch, ktoré boli uvedené vyššie.

Regularizovaný splajn s tenziou (RST) je príklad metódy, ktorá patrí medzi tzv. globálne splajny. Ide o veľmi presnú metódu, ktorá však vyžaduje hlbšie znalosti o vplyve jej parametrov na výsledok. Jej použitie je však jednoduchšie ako v prípade krigingových metód.

Metóda existuje v 2D, 3D a 4D verzii, pričom vo vyšších dimenziách umožňuje interpolovať jav aj s doplnkovou premennou (Hofierka, 1997). Príkladom je interpolácia dlhodobého priemeru ročného úhrnu zrážok na území Slovenska, kde je znázornený 20-ročný priemer ročných úhrnov zrážok. Poloha vstupných dát je vyjadrená čiernymi bodkami a modelovaný jav je znázornený ako farebný povrch s najvyššími hodnotami v okolí pohorí. Keďže v našich pohoriach s rastom nadmorskej výšky zvyčajne narastá aj ročný úhrn zrážok, v prípade 3D interpolácie je tento jav dobre zachytený prostredníctvom dát o nadmorskej výške odvodených z digitálneho modelu reliéfu s rozlíšením 500 metrov, ktorý vstupoval do interpolácie ako doplnková premenná (Hofierka et al., 2002).

6.10 Kriging

Kriging patrí medzi stochastické metódy a je súčasťou geoštatistických metód. Metóda dostala názov krigeage (kriging) na počesť D. G. Krigea, ktorý sa snažil odhadnúť najpravdepodobnejšie rozloženie nálezísk zlata na základe dát z niekoľkých vrtov. Kriging sa používa na opis a hodnotenie prírodných javov opísaných premennými hodnotami v priestore. Táto metóda môže byť použitá pri modelovaní

javov, pri ktorých sa predpokladá spojitý priebeh hodnôt alebo aspoň určitý vzťah medzi hodnotami javu lokalizovaného v priestore. Teda, aby bolo možné použiť kriging pre interpoláciu, je potrebné, aby vstupné dáta boli priestorovo autokorelované. Základnou myšlienkou metódy je nájsť priestorovú závislosť, ktorá charakterizuje vlastnosti javu v priestore, ako to vyplýva z meraných dát a tieto odhalené vlastnosti použiť vo forme matematickej funkcie aj na zvyšný priestor.

Ako uvádza Dobrovolný (2010), kriging ako interpolačná metóda je tvorená z troch častí, pričom všetky časti sú analyzované samostatne. Prvú časť predstavuje tzv. všeobecný trend, ktorý sa odvodzuje na základe trendovej funkcie. Druhú časť predstavuje kolísanie hodnôt, tzv. regionalizovaná premenná, ktorú je možné vyjadriť matematickou funkciou, avšak vyjadruje určitú priestorovú závislosť. Táto časť je určená na základe variogramov. Tretiu zložku tvorí náhodný šum. Z uvedeného je možné zapísať nasledujúci vzťah:

$$z(x) = \mu(x) + \gamma(h) + \varepsilon \quad (6.39)$$

kde

$z(x)$ – je interpolovaná hodnota v bode x so súradnicami x a y . Táto premenná sa zvykne označovať aj $Z(x)$. Z má zvýrazniť charakter funkcie, a teda že ide o náhodnú funkciu a nie o hodnotu určenú na základe merania.

$\mu(x)$ – (čítaj mý) predstavuje deterministickú zložku, ktorá je určená na základe trendovej funkcie v bode x so súradnicami x a y .

$\gamma(h)$ – (čítaj gama) reprezentuje stochastickú zložku, ktorú sa označuje ako regionalizovanú premenná avšak priestorovo nezávislú od trendovej funkcie $\mu(x)$, h je hodnota vektora vzdialená od bodu x so súradnicami x a y .

ε - (čítaj epsílon) náhodná, priestorovo nezávislá zložka, tzv. gaussovský šum s nulový priemerom a rozptylom σ^2 (čítaj sigma).

Základom pre určenie interpolovanej hodnoty $z(x)$ je štruktúrna analýza. Geoštatistická štruktúrna analýza (tzv. variografia) je proces zahŕňajúci výpočet štruktúrálnych funkcií, výber a konštrukciu zodpovedajúcich teoretických modelov, ich aplikáciu a interpretáciu priebehu štruktúrálnych funkcií. Cieľom štruktúrnej analýzy je popísanie vlastností vstupného bodového poľa, ako sú kontinuita, homogenita, stacionarita a anizotropia. Tieto vlastnosti sú určované na základe mier priestorovej autokorelácie a priestorovej variability. Štruktúrna analýza je východiskom pre geoštatistické modelovanie, avšak sama o sebe poskytuje širokú paletu dôležitých informácií o štruktúre náhodného poľa ako modelu konkrétneho objektu v krajinej sfére. Ku kvantifikácii priestorovej autokorelácie slúži štruktúrna analýza, ktorá určuje silu korelačného vzťahu pre súbor pravidelne rozmiestnených bodov na línii. Charakteristiky, ktoré ju popisujú môžu byť napr. priemer, rozptyl, kovariancia a semivariancia. Jednou z najpoužívanejších charakteristík v geoštatistike je semivariancia a kovariancia, preto sa im v nasledujúcej časti budeme venovať.

Pre zjednodušenie uvedieme vysvetlenie semivariancii na 1D priestore, kde semivarianciu môžeme definovať ako:

$$\gamma(x_i x_j) = \frac{1}{2} \text{var} (z(x_i) - z(x_j)) \quad (6.40)$$

kde $\text{var} (z(x_i) - z(x_j))$ je rozptyl, teda rozdiel hodnôt sledovaného javu v bodoch x_i a x_j . Ak sú dva body x_i a x_j blízko seba, bude rozdiel hodnôt $z(x_i)$ a $z(x_j)$ malý. S rastom vzdialenosti sa podobnosť hodnôt bude zmenšovať. Grafické znázornenie závislosti semivariácie na vzdialenosti je štruktúrna funkcia, ktorá sa nazýva semivariogram. Semivariogram je jeden z najpoužívanejších štruktúrálnych funkcií v geoštatistike, ktorý vyjadruje mieru nepodobnosti. Iný typ štruktúrálnej funkcie predstavuje kovariancia, ktorá je definovaná ako:

$$C_{(x_i x_j)} = cov(z(x_i), z(x_j)) \quad (6.41)$$

kde $cov(z(x_i), z(x_j))$ vyjadruje mieru podobnosti. Ak sú dva body x_i a x_j blízko seba, bude ich kovariancia veľká. Hodnota kovariancie je pri nulovej vzdialenosti rovná rozptylu množiny spracovávaných dát. Vzťah medzi semivariogramom a kovariačnou funkciou je možné vyjadriť pomocou vzťahu:

$$\gamma_{(x_i x_j)} = sill - C_{(x_i x_j)} \quad (6.42)$$

kde *sill* označuje tzv. prahovú hodnotu, na ktorej má semivariogram vodorovný priebeh.

Aby bolo možné popísať závislosť hodnôt v 2D priestore, určíme hodnoty semivariancie pre všetky dvojice bodov na základe vzťahu:

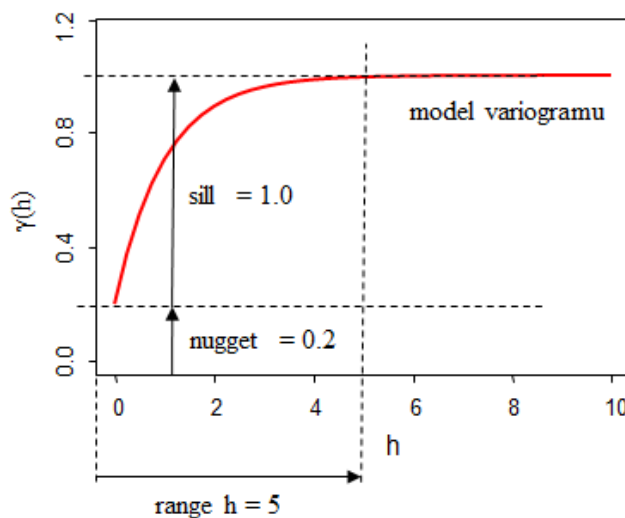
$$\gamma_{(h)} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (6.43)$$

kde

n – je počet dvojíc z bodov vstupného bodového poľa s hodnotou z vzdialených o hodnotu h

h - (*lag*) vzdialenosť danej dvojice bodov,

a následne určíme semivariogramy, cez ktoré sa snažíme preložiť funkciu vyjadrujúcu závislosť. Graf hodnôt $\gamma_{(h)}$ sa označuje ako experimentálny semivariogram. Na horizontálnu os sú vynášané vzdialenosti danej dvojice bodov (tzv. *lag*) a na vertikálnu os sú nanášané hodnoty rozptylu sledovaného javu ako funkcie vzájomných vzdialeností jednotlivých meraných bodov.



6.54 Náčrt tvorby semivariogramu

nugget – zvyškový rozptyl alebo veľkosť posunutia semivariogramu v jeho začiatku; Ako uvádza Hlásny (2005), ide o hodnotu vyjadrujúcu tzv. nespojitosť na začiatku, resp. hodnotu variancie pri veľmi malých hodnotách veľkosti vektora h väčšiu ako nula. Tento pojem pochádza z banského inžinierstva, kde pri porovnaní výsledkov analýzy koncentrácie určitej rudy dvoch vrtoz oddelených minimálnou vzdialenosťou by mala byť hodnota variancie nulová, alebo zanedbateľná – ale len v prípade, že jeden z vrtoz neobsahoval zlatý nugget. V tomto prípade bol rozdiel v zrudnení týchto dvoch lokalít významný, čo sa prejavilo v zmene priebehu štruktúrnej funkcie, ktorá pri veľkosti $h = 0$ nadobudne hodnotu variancie väčšiu ako nula. Ďalšie z príčin posunutia variogramu sú napr. chyby pri zbere údajov, ktoré môžu mať viaceré príčiny (limitujúca schopnosť zariadenia merať presnejšie,

nepresnosť v spracovaní dát, subjektívnosť pri zbere dát a pod.). Zvyškový rozptyl je tak vyjadrením náhodného šumu ε .

sill – prah alebo lepšie prahová hodnota variogramu vo vzdialenosti, pri ktorej je dosiahnutý *range*. Ideálnym prípadom je, keď sa pri väčších vzdialenostiach jednotlivé regionalizované premenné stanú priestorovo nezávislé a dosiahnutá hodnota variogramu zostáva viac-menej konštantná. Hodnota prahu je súčasne odhadom výberovej variance (rozptylu) sledovaného javu. Ak teda vyselektujeme ľubovoľný súbor regionalizovaných premenných s rozsahom n , tak platí vzťah:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = C \quad (6.44)$$

pričom

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.45)$$

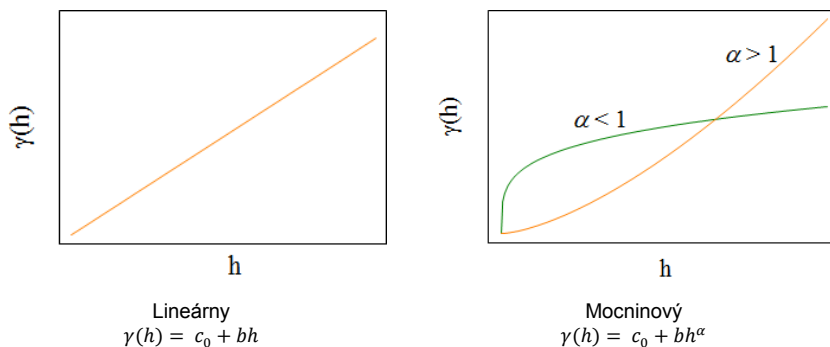
Z hľadiska spôsobu, akým variogramy dosahujú hodnotu prahu, rozlišujeme teoretické modely variogramov na:

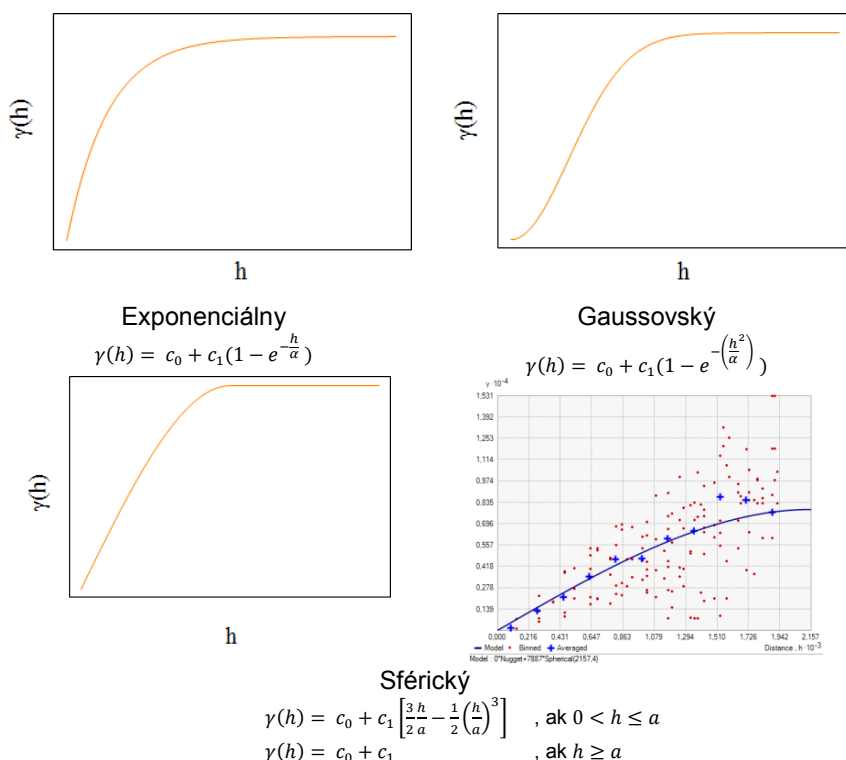
1. bez prahové – lineárny, logaritmický
2. s prahom – sférický, exponenciálny, Gaussov
3. s nuggetovým efektom

V prípade exponenciálneho a Gaussovho variogramu nie je dosiahnutý skutočný prah. Ako prah sa v týchto prípadoch označuje vzdialenosť, v ktorej variogram dosiahol 95 % hodnoty dosahu, čo sa označuje ako účinný alebo praktický dosah.

range – dosah, je hodnota vzdialenosti, v ktorom je rozdiel variogramu už zanedbateľný, resp. v ktorej sa štruktúrna funkcia stabilizuje. Za touto hodnotou sa nie sú polohy sledovaného javu korelované. Hodnota dosahu môže byť interpretovaná ako zóna vplyvu regionalizovaných premenných. Za špecifický prípad teoretického modelu variogramu je možné považovať tzv. účinok prepadu (hole effect), ktorý sa prejavuje obnovením priestorovej závislosti po tom, ako hodnota dosahu už bola dosiahnutá.

Na základe variogramov je možné kvantitatívne popísať regionalizované premenné. Experimentálnym semivariogramom sa v nasledujúcom kroku prekladá teoretický model semivariogramu. Existuje mnoho teoretických modelov semivariogramov (napr. sférický, tetrasférický, pentasférický, exponenciálny, gaussovský, všeobecný lineárny, K-Besselov, J-Besselov, logaritmický a ďalšie). Jeho výber určuje používateľ, a preto je značne subjektívny, čo sa často uvádza ako nedostatok metódy. V nasledujúcom obrázku stručne predstavíme aspoň niektoré teoretické modely variogramov.





Ak parametre semivariogramu sú rôzne v rôznych smeroch, tak študované pole je anizotropné. Môže ísť o geometrickú alebo zonálnu anizotropiu.

Nakoľko ide o výpočtovo náročnú úlohu do ktorej vstupujú aj ďalšie parametre, tejto problematike sa už podrobnejšie nebudeme venovať, nakoľko je to nad rámec obsahu učebnice.

Kokriging je geoštatistická interpolačná metóda, ktorá umožňuje pri interpolácii skúmanej premennej využívať informácie o priestorovom rozložení doplnkovej, sekundárnej premennej. Využíva sa najmä v situáciách, keď sa predpokladá vzťah medzi skúmanou (interpolovanou) a doplnkovou premennou v situácii, keď informácie o priestorovom rozložení doplnkovej premennej sú podrobnejšie ako pri interpolovaných dátach. Pri kokrigingu sa vychádza podobne ako pri krigingu z výsledkov geoštatistickej analýzy. Na rozdiel od krigingu je však potrebná konštrukcia nielen semivariogramu skúmanej premennej, ale aj semivariogramu doplnkovej premennej a krížového semivariogramu medzi skúmanou a doplnkovou premennou.

Najčastejšie aplikácie krigingových metód v praxi sú najmä v geológii, chémii, geomorfológii a hydrológii. V súčasnosti väčšina softvérov GIS umožňujúca spracovanie rastrových dát obsahuje moduly na interpoláciu, resp. geoštatistiku. Geoštatistické metódy poskytujú veľké možnosti analýzy skúmaného javu, avšak sú pomerne náročné na pochopenie a správne používanie.

7 ZÁVER

Problematika analýzy priestorových dát a modelovanie krajinných objektov a javov je veľmi komplexná a má výrazný interdisciplinárny charakter. Na priestorového analytika sú kladené viaceré nároky, ktoré si vyžadujú hlbšie znalosti z rôznych oblastí. Ide napríklad o schopnosť efektívneho zberu údajov s dostatočnou presnosťou a detailnosťou, spracovanie údajov, voľbu vhodnej metódy pre analýzu a modelovanie sledovaných krajinných fenoménov, ich vizualizáciu v podobe máp, obrázkov a grafov a interpretáciu dosiahnutých výsledkov. Navyše, pri analýze a modelovaní krajinných fenoménov sa vyžadujú aj ďalšie znalosti z oblasti kartografie, geodézie, diaľkového prieskumu zeme, informatiky, matematiky a geografie. Samostatnou oblasťou je schopnosť využívania geografických informačných systémov.

Pracovníci Ústavu geografie na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach dlhodobo využívajú pri analýze krajiny moderné technológie a geografický informačný systém. Počas viacerých rokov nadobudli bohaté skúsenosti z viacerých oblastí, v ktorých bolo potrebné využívať metódy priestorovej analýzy dát a ich modelovanie. Boli súčasťou viacerých domácich a zahraničných konzorcií, ktoré riešili viaceré vedecko-výskumné projekty, ale aj komerčné zákazky. Dokladom týchto aktivít sú početné publikácie a niektoré spoločné projekty s partnerskými firmami.

Od roku 2015 je v platnosti nový systém študijných programov na bakalárskom a magisterskom stupni v odbore geografia. Možnosť väčšej špecializácie študentov v oblasti geoinformatiky si vyžaduje venovať vyššiu pozornosť práve predmetu Priestorové analýzy a modelovanie, kde pri jeho výučbe čerpáme aj z našich skúseností. Cieľom je príprava odborníkov na prax vo firmách, ktoré sa venujú oblasti zberu, spracovania a analýzy geopriestoroch údajov, ako aj príprava študentov na doktorandské štúdium v odbore geoinformatika.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- Bailey, T.C., Gatrell, A. C. (1995). *Interactive Spatial Data Analysis*. John Wiley and Sons, New York.
- Boissonnat, J.D., Devillers, O., Pion, S., Teillaud, M., Yvinec, M. (2002): Triangulations in CGAL. *Computational Geometry*, 22(1-3), s. 5-19.
- Burian L., Jenčo, M., Rusnák M. (2015): GRASS GIS – Geovedné aplikácie. , Prírodovedecká fakulta Univerzita Komenského v Bratislave, Geografický Ústav Slovenská akadémia vied, Bratislava. 103 s.
- Burrough, P., McDonnell, R. (1998): *Principles of Geographical Information Systems (Spatial Information Systems)* 2nd Edition. Oxford University Press, Oxford. 333 s.
- Cebecauer, T., Hofierka, J., Šúri, M. (2002): Processing digital terrain models by regularized spline with tension: tuning interpolation parameters for different input datasets, *Proceedings of the Open source GIS-GRASS users conference*, s. 123-134,
- Dobrovolný, P. (2010): *Geostatistika*. Masarykova univerzita v Brne, Prírodovedecká fakulta Geografický ústav, Brno. 104 s.
- Earth Gravity Model 2008, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/> (navštívené júl, 2015)
- El-Sheimy, N., Valeo, C., Habib, A. (2005): *Digital Terrain Modelling: Acquisition, Manipulation and Applications*, Artech House. 270 s.
- Fajmon, B., Ružičková, I. (2005): *Matematika 3*, Fakulta elektrotechniky a komunikačných technológií, Vysoký učení technické v Brne, Brno. 256 s.
- Feciskanin, R. (2009): Optimalizácia nepravidelných trojuholníkových sietí pre modelovanie georeliéfu. Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita v Brne. Dizertačná práca. 132 s.
- Feciskanin, R. (2010): Problems of georelief models created by shape optimized triangulated irregular networks. *Kartografické listy* 18, s. 49-56.
- Gallay, M., Kaňuk, J., Hochmuth Z., Meneely, J., Hofierka, J., Sedlák, V. (2015): Large-scale and high-resolution 3-D cave mapping by terrestrial laser scanning: a case study of the Domica Cave, Slovakia. *International Journal of Speleology*. 44(3), s. 277-291.
- Gallay, M., Lloyd, C. McKinley J., Barry, L. (2013): Assessing modern ground survey methods and airborne laser scanning for digital terrain modelling: A case study from the Lake District, England. *Computers & Geosciences*. 51(2), s. 216-227.
- Hengl, T. (2006): Finding the right pixel size. *Computers & Geosciences* 32 (2006), s. 1283-1298
- Hlásny, T. (2005): Geoštatistický koncept priestorovej závislosti pre geografické aplikácie. *Geografický časopis*, 57(2), s. 97-116.
- Hlásny (2007): *Geografické informačné systémy - priestorové analýzy*. Zephyros a Národné lesnícke centrum, Zvolen. 160 s.
- Hofierka, J. (2005): Interpolation of Radioactivity Data Using Regularized Spline with Tension. *Applied GIS*, 1(2), s. 16-01 - 16-13
- Hofierka, J., Kaňuk, J., Gallay, M. (2014): *Geoinformatika*. Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Košice, 192 s..
- Hofierka, J., (1997): *Modelovanie prírodných javov v prostredí geografického informačného systému*. Dizertačná práca PhD., Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského v Bratislave, Bratislava. 83 s.
- Hofierka, J., (2003): *Geografické informačné systémy a diaľkový prieskum Zeme*. Vysokoškolské učebné texty. Fakulta humanitných a prírodných vied Prešovskej univerzity, Prešov. 116 s.

- Hofierka J., Parajka J., Mitašová H., Mitáš L. (2002): Multivariate Interpolation of Precipitation Using Regularized Spline with Tension. *Transactions in GIS* 6(2), s. 135-150.
- Kaňuk, J., Gallay, M., Hofierka, J. (2015): Generating time series of virtual 3-D city models using a retrospective approach. *Landscape and Urban Planning*, 139, s. 40-53
- Krajčí S.(2005): Databázové systémy, Ústav Informatiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, 270 s.
- Koreň, M. (2006): Modelovanie krajiny prostredníctvom polí. *Geografický časopis*. 58 (1), s. 45-60.
- Krcho, J. (1990). Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu. Bratislava (Veda). 432 s.
- Kumler, M. (1994): An Intensive Comparison of Triangulated Irregular Networks (TINs) and Digital Elevation Models (DEMs). *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 31(2), s. 1-99.
- Lloyd, CD (2010) *Spatial Data Analysis: An Introduction for GIS Users*. Oxford University Press, Oxford, s. 206.
- Longley, P. A., Goodchild, M. F., Maguire, D. J., Rhind, D. W. (2011): *Geographic Information Systems and Science*. John Wiley & Sons.
- Mitas, L., Mitašová H. (1988): General variational approach to the approximation problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 16, s. 983-992.
- Malzbender, T., Gelb, D., Wolters, H., Zuckerman, B. (2000): Enhancement of Shape Perception by Surface Reflectance Transformation. Tech. Rep. HPL- 2000-38R1. Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, California.
- Malzbender, T., Gelb, D., Wolters, H. (2001): Polynomial texture maps. In: *SIGGRAPH'01: Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, New York, USA. ACM Press, s. 519 - 528.
- Mitašová, H., Mitas, L. (1993): Interpolation by Regularized Spline with Tension: I. Theory and Implementation, *Mathematical Geology* ,25, s. 641-655.
- Mitas, L., Mitasova, H. (1999): Spatial Interpolation. In: P. Longley, M.F. Goodchild, D.J. Maguire, D.W.Rhind (Eds.), *Geographical Information Systems: Principles, Techniques, Management and Applications*, GeoInformation International, Wiley, s. 481-492.
- Mitašová, H. and Hofierka, J. (1993): Interpolation by Regularized Spline with Tension: II. Application to Terrain Modeling and Surface Geometry Analysis, *Mathematical Geology* 25, s. 657-667.
- Mitas, L., Mitasova, H. (2000): Unit 130 - Process Modeling and Simulations. NCGIA Core Curriculum in Geographic Information Science, <http://www.ncgia.ucsb.edu/giscc> (navštívené 14.9.2015)
- Mitašová, H., Mitas, L., Harmon, R.S. (2005): Simultaneous spline approximation and topographic analysis for lidar elevation data in open source GIS, *IEEE GRSL* 2 (4), s. 375- 379.
- Mitasova, H., L. Mitas, B.M. Brown, D.P. Gerdes, I. Kosinovsky (1995): Modelling spatially and temporally distributed phenomena: New methods and tools for GRASS GIS. *International Journal of GIS*, 9 (4), s. 443-446.
- Moons, T., Van Gool, L., Vergauwen M. (2008): D Reconnstruction from Multiple Images. Part 1: Principles. *Foundations and Trends. Computer Graphics and Vision*, 4 (4), s. 287–398
- Neteler, M., Mitašová, H. (2004): *Open Source GIS: A GRASS GIS Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston. 464 s.
- Neteler, M. and Mitašová, H. (2008): *Open Source GIS: A GRASS GIS Approach*, 3rd Edition, Springer, New York, 406 s.
- O'rouke, J. (1998). *Computational Geometry in C 2*. Cambridge (University Press). 376 s.

Sibson, R. (1981): A brief description of natural neighbor interpolation. chapter 2 in Interpolating Multivariate Data. New York: John Wiley & Sons, s. 21–36.

Talmi, A., Gilat, G. (1977) : Method for Smooth Approximation of Data, Journal of Computational Physics, 23, s. 93-123.

Tobler W., (1970): A computer movie simulating urban growth in the Detroit region. Economic Geography, 46(2), s. 234-240.

Tuček, J. (1998): Geografické informační systémy. Principy a praxe. Computer Press. Brno. 424 s.

Vajsáblová, M. (2014): Aspekty tvorby kartografického zobrazenia pre územie Slovenska. Habilitačná práca. Stavebná fakulta Slovenskej technickej univerzity (STU) v Bratislave, Bratislava.

Vajsáblová, M., Bacigál, T., Droppová, V. (2013): *Matematická kartografia*. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2013. 315 s.

Wahba, G. (1990): Spline Models for Observational Data, CNMS-NSF Regional Conference series in applied mathematics, 59, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. 177 s.

PRIESTOROVÉ ANALÝZY A MODELOVANIE

Vysokoškolské učebné texty

Autor: RNDr. Ján Kaňuk, PhD.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Miesto vydania: Košice

Rok vydania: 2015

Náklad: 200 ks

Rozsah strán: 114

Rozsah: 4,2 AH

Vydanie: prvé

Tlač: EQUILIBRIA, s.r.o.

Účelová publikácia, nepredajná.

ISBN 978-80-8152-290-1